

UNIVERSIDADE DE LISBOA  
FACULDADE DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA E INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL



# **Aplicação de Estimadores Robustos de Localização e Escala em Cartas de Controlo de Qualidade**

João Paulo Leonardo Cordeniz

**Mestrado de Estatística e Investigação Operacional**  
Especialização em Estatística

Dissertação Orientada por:  
Prof.<sup>a</sup> Doutora Maria Isabel Calisto Frade Barão

2019

## Agradecimentos

À minha orientadora, Prof.<sup>a</sup> Doutora Maria Isabel Calisto Frade Barão, pela sua disponibilidade, apoio e por todo o seu conhecimento partilhado, sem o qual esta dissertação não teria sido realizada.

À minha cunhada, Dr.<sup>a</sup> Vera Inácio Cordeniz, pelo seu apoio e conselhos na escrita da dissertação.

À minha afilhada, Dr.<sup>a</sup> Diana Alegria, pela sua dedicação e ajuda sempre que necessário.

Às comunidades online do R e do Latex por todas as suas sugestões disponibilizadas.

E a todos outros que de forma direta ou indireta ajudaram-me a conseguir cumprir os objetivos.

## Resumo

No controlo estatístico de um processo de produção é costume assumir-se a normalidade das variáveis em estudo, sendo o valor médio e a variabilidade dessas variáveis as características de qualidade com maior interesse para controlo. Ora, assumir que a característica de qualidade segue uma distribuição Normal pode ser abusivo, como no caso de variáveis assimétricas e/ou com caudas pesadas, dando origem a decisões erradas.

Para tal há que utilizar cartas de controlo baseadas em estatísticas mais eficientes e robustas. Em relação a estas estatísticas, espera-se que sejam mais resistentes quando existem alterações nos processos industriais. Na estimação do valor central em vez de se recorrer à tradicional média amostral ou à mediana amostral também se poderá utilizar a mediana total ou a tri-média, sendo estas consideradas mais robustas. Na estimação da dispersão temos como estatísticas tradicionais a amplitude e o desvio padrão, em contrapartida para uma estatística mais robusta existe a amplitude total ou o desvio absoluto da média.

Tem, pois, interesse o estudo de metodologias para a construção de cartas de controlo quando as variáveis não seguem uma distribuição Normal. Para além da utilização das estatísticas robustas tem-se como opção a utilização de cartas de controlo baseadas na distribuição da população do processo em estudo assim como a aplicação da transformação Box-Cox. Neste estudo, estes métodos serão analisados e comparados com as cartas de controlo tradicionais de modo a averiguar se apresentam um melhor desempenho.

**Palavras Chave:** Cartas de Controlo, Estimadores Robustos, Estimadores Eficientes, Cartas de Controlo com Quantis

## Abstract

In Statistical Control of a production process, it is usual to assume the normality of the variables in study, being the mean value and the variability of these variables the quality characteristics with higher interest for control. Assuming that the quality characteristic follows a normal distribution can be a mistake, for example when we have asymmetric or heavy tailed variables, which can lead to wrong decisions.

For this reason, the use of control charts based on more efficient and robust statistics is needed. These statistics are supposed to be more resistant when there are changes on the industrial processes. For the central value estimation instead of using the traditional mean or the median it is possible to use the total median or the trimean, which are considered to be more robust. For the dispersion estimation we have as traditional statistics the range and the standard deviation, and for a more robust statistic we have the total range or the average absolute deviation. On this way, these statistics can be used for the chart control construction when the variables doesn't follow the Normal Distribution. Besides the robust statistics it is possible to use the control charts which limits are based on the process distribution quantiles or the Box-Cox transformation. In this dissertation, these methods will be compared with the classical control charts to conclude if they present higher performance.

**Keywords:** Control Charts, Robust Estimators, Efficient Estimators, Control Charts with quantiles

# Índice

<b>Agradecimentos</b>	<b>I</b>
<b>Resumo</b>	<b>II</b>
<b>Abstract</b>	<b>III</b>
<b>Índice de Figuras</b>	<b>VI</b>
<b>Índice de Tabelas</b>	<b>VII</b>
<b>Índice de Siglas</b>	<b>X</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Elementos de Eficiência e Robustez</b>	<b>2</b>
2.1 Eficiência e Robustez . . . . .	2
2.1.1 Assimetria e Peso de Caudas . . . . .	2
2.1.2 Eficiência dos Estimadores de Localização e Escala . . . . .	2
2.1.3 Eficiência Relativa . . . . .	3
2.2 Estatísticas em Estudo . . . . .	4
2.2.1 Estatísticas Clássicas . . . . .	4
2.2.2 Mediana Total . . . . .	4
2.2.3 Tri-Média . . . . .	5
2.2.4 Amplitude total . . . . .	6
2.2.5 Desvio Absoluto da Média . . . . .	7
2.3 Distribuições em Estudo . . . . .	7
2.3.1 Modelos Simétricos . . . . .	7
2.3.2 Modelos Assimétricos . . . . .	10
<b>3 Análise da Eficiência e Robustez das Estatísticas</b>	<b>13</b>
3.1 Análise da Eficiência e Robustez das Estatísticas de Localização . . . . .	13
3.1.1 Simulação . . . . .	13
3.1.2 Análise da Eficiência e Robustez em Distribuições Simétricas . . . . .	13
3.1.3 Análise da Eficiência e Robustez em Distribuições Assimétricas . . . . .	13
3.2 Análise da Eficiência e da Robustez das Estatísticas de Dispersão . . . . .	17
3.2.1 Simulação . . . . .	17
3.2.2 Análise da Eficiência e Robustez em Distribuições Simétricas . . . . .	17
3.2.3 Análise da Eficiência e Robustez em Distribuições Assimétricas . . . . .	19
<b>4 Cartas de Controlo</b>	<b>21</b>
4.1 Cartas $3\text{-}\sigma$ . . . . .	21
4.2 Desempenho das Cartas . . . . .	22
4.3 Análise das Taxas de Falso Alarme para as Cartas $3\text{-}\sigma$ . . . . .	24
4.3.1 Simulação . . . . .	24
4.3.2 Taxas de Falso Alarme das Cartas de Estimadores de Localização . . . . .	25
4.3.3 Taxas de Falso Alarme das Cartas de Estimadores de Escala . . . . .	26

4.4	Análise dos Valores das Funções Potência para as Cartas $3\text{-}\sigma$ . . . . .	28
4.4.1	Simulação . . . . .	28
4.4.2	Funções Potência para as Cartas dos Estimadores de Localização . . . . .	28
4.4.3	Funções Potência para as Cartas dos Estimadores de Escala . . . . .	31
4.5	Cartas de Controlo com Limites Definidos por Quantis . . . . .	33
4.5.1	Simulação . . . . .	33
4.5.2	Quantis dos Estimadores . . . . .	33
4.5.3	Funções Potência das Cartas de Estimadores de Localização . . . . .	34
4.5.4	Funções Potência das Cartas de Estimadores de Escala . . . . .	37
4.6	Comparações entre Cartas $3\text{-}\sigma$ e Cartas q . . . . .	39
4.6.1	Amostras provenientes de $L_p(0,1)$ . . . . .	39
4.6.2	Amostras provenientes de $CN(0.3,4)$ . . . . .	43
4.7	Cartas de Quantis com Transformação Box-Cox . . . . .	45
4.7.1	Transformação Box-Cox . . . . .	45
4.7.2	Taxas de Falso Alarme . . . . .	46
4.7.3	Valores das Funções Potência . . . . .	50
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>53</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>55</b>
	<b>Anexos</b>	<b>57</b>

## Índice de Figuras

2.1	Função Densidade de Probabilidade da $N(0,1)$ . . . . .	8
2.2	Função Densidade de Probabilidade da $t(15)$ . . . . .	8
2.3	Função Densidade de Probabilidade da $\text{Log}(0,1)$ . . . . .	9
2.4	Função Densidade de Probabilidade da $Lp(0,1)$ . . . . .	9
2.5	Função Densidade de Probabilidade da $CN(0.3,4)$ . . . . .	10
2.6	Função Densidade de Probabilidade da $\chi^2(3)$ . . . . .	10
2.7	Função Densidade de Probabilidade da $LN(0,1)$ . . . . .	11
2.8	Função Densidade de Probabilidade da $G(0.5,1)$ . . . . .	11
2.9	Função Densidade de Probabilidade da $W(0.75,1)$ . . . . .	12
3.1	Grau da Robustez das Estatísticas de Localização para as Distribuições Simétricas e Dimensões consideradas . . . . .	14
3.2	Grau da Robustez das Estatísticas de Localização para as Distribuições Assimétricas e Dimensões consideradas . . . . .	16
3.3	Grau da Robustez das Estatísticas de Escala para as Distribuições Simétricas e Dimensões consideradas . . . . .	18
3.4	Grau da Robustez das Estatísticas de Escala para as Distribuições Assimétricas e Dimensões consideradas . . . . .	19
4.1	Valores das funções potência das cartas $3-\sigma$ de estimadores de localização, calculados a partir de dados provenientes de uma $Lp(0,1)$ para $n=10$ e $5$ . . . . .	39
4.2	Valores das funções potência das cartas $q$ de estimadores de localização, calculados a partir de dados provenientes de uma $Lp(0,1)$ para $n=10$ e $5$ . . . . .	40
4.3	Valores das funções potência das cartas $q$ de estimadores de dispersão, calculados a partir de dados provenientes de uma $Lp(0,1)$ para $n=10$ e $5$ . . . . .	41
4.4	Valores das funções potência das cartas $q$ de estimadores de dispersão, calculados a partir de dados provenientes de uma $Lp(0,1)$ para $n=10$ e $5$ . . . . .	42
4.5	Valores das funções potência das cartas de quantis dos estimadores de localização, calculados a partir de dados provenientes de uma $CN(0.3,4)$ para $n=10$ e $5$ . . . .	43
4.6	Valores das funções potência das cartas de quantis dos estimadores de dispersão, calculados a partir de dados provenientes de uma $CN(0.3,4)$ para $n=10$ e $5$ . . . .	44

## Índice de Tabelas

2.1	Valores dos $a_i$ para $n \leq 10$	5
2.2	Valores dos $b_i$ para $n \leq 10$	7
3.1	Estimadores mais eficientes por distribuição simétrica e dimensão	14
3.2	Estimadores mais eficientes por distribuição assimétrica e dimensão	15
3.3	Estimadores mais eficientes por distribuição simétrica e dimensão	17
3.4	Estimadores mais eficientes por distribuição assimétrica e dimensão	19
4.1	Estimativas do desvio padrão $d_3$ para $n \leq 20$	24
4.2	Taxas de falso alarme da Carta da Média	25
4.3	Taxas de falso alarme da Carta da Mediana Total	25
4.4	Taxas de falso alarme da Carta da Tri-Média	25
4.5	Estimativas do valor médio ( $d_2$ ) e do desvio padrão ( $d_3$ ) para as estatísticas de dispersão ( $3 \leq n \leq 11$ )	26
4.6	Estimativas do valor médio ( $d_2$ ) e do desvio padrão ( $d_3$ ) para as estatísticas de dispersão ( $12 \leq n \leq 20$ )	26
4.7	Taxas de falso alarme da Carta de Amplitude	26
4.8	Taxas de falso alarme da Carta de Amplitude Total	27
4.9	Taxas de falso alarme da Carta de Desvio Absoluto da Média	27
4.10	Valores da Função Potência da Carta de Controlo da Média ( $n=10$ )	28
4.11	Valores da Função Potência da Carta de Controlo da Mediana Total ( $n=10$ )	28
4.12	Valores da Função Potência da Carta de Controlo da Tri-Média ( $n=10$ )	29
4.14	Valores da Função Potência da Carta de Controlo da Mediana Total ( $n=5$ )	30
4.15	Valores da Função Potência da Carta de Controlo da Tri-Média ( $n=5$ )	30
4.13	Valores da Função Potência da Carta de Controlo da Média ( $n=5$ )	30
4.16	Valores da Função Potência para a Carta de Amplitude ( $n=10$ )	31
4.17	Valores da Função Potência para a Carta de Amplitude Total ( $n=10$ )	31
4.18	Valores da Função Potência para a Carta de Desvio Absoluto da Média ( $n=10$ )	31
4.19	Valores da Função Potência para a Carta de Amplitude ( $n=5$ )	32
4.20	Valores da Função Potência para a Carta de Amplitude Total ( $n=5$ )	32
4.21	Valores da Função Potência para a Carta de Desvio Absoluto da Média ( $n=5$ )	32
4.22	Valores Simulados dos Limites para as cartas dos estimadores de Localização para $n=5$	34
4.23	Valores Simulados dos Limites para as cartas dos estimadores de Localização para $n=10$	34
4.24	Valores Simulados dos Limites Superiores $\chi_{0.998}$ para as cartas de dispersão	34
4.25	Valores da Função Potência da Carta de Controlo da Média com quantis ( $n=5$ )	35
4.26	Valores da Função Potência da Carta de Controlo da Mediana Total com quantis ( $n=5$ )	35
4.27	Valores da Função Potência da Carta de Controlo da Tri-Média com quantis ( $n=5$ )	35
4.28	Valores da Função Potência da Carta de Controlo da Média com quantis ( $n=10$ )	36
4.29	Valores da Função Potência da Carta de Controlo da Mediana Total com quantis ( $n=10$ )	36
4.30	Valores da Função Potência da Carta de Controlo da Tri-média com quantis ( $n=10$ )	36
4.31	Valores da Função Potência para a Carta da Amplitude com quantis ( $n=10$ )	37



4.32	Valores da Função Potência para a Carta da Amplitude Total com quantis (n=10)	37
4.33	Valores da Função Potência para a Carta do Desvio Absoluto da Média com quantis (n=10)	37
4.34	Valores da Função Potência para a Carta da Amplitude com quantis (n=5)	37
4.35	Valores da Função Potência para a Carta da Amplitude Total com quantis (n=5)	38
4.36	Valores da Função Potência para a Carta do Desvio Absoluto da Média com quantis (n=5)	38
4.37	Valores dos Lambda's para os modelos considerados	47
4.38	Taxas de Falso Alarme da carta da Média com quantis	47
4.39	Taxas de Falso Alarme da carta da Mediana Total com quantis	47
4.40	Taxas de Falso Alarme da carta da Tri-Média com quantis	48
4.41	Taxas de Falso Alarme da carta da Amplitude com quantis	48
4.42	Taxas de Falso Alarme da carta da Amplitude Total com quantis	48
4.43	Taxas de Falso Alarme da carta do Desvio Absoluto da Média com quantis	48
4.44	Taxas de Falso Alarme da carta da Média com quantis com transformação Box-Cox	48
4.45	Taxas de Falso Alarme da carta da Mediana Total com quantis com transformação Box-Cox	49
4.46	Taxas de Falso Alarme da carta da Tri-Média com quantis com transformação Box-Cox	49
4.47	Taxas de Falso Alarme da carta da Amplitude com quantis com transformação Box-Cox	49
4.48	Taxas de Falso Alarme da carta da Amplitude Total com quantis com transformação Box-Cox	49
4.49	Taxas de Falso Alarme da carta do Desvio Absoluto da Média com quantis com transformação Box-Cox	50
4.50	Valores da Função Potência da Carta de Controlo da Média de quantis com transformação Box-Cox	50
4.51	Valores da Função Potência da Carta de Controlo da Mediana Total de quantis com transformação Box-Cox	51
4.52	Valores da Função Potência da Carta de Controlo da Tri-Média de quantis com transformação Box-Cox	51
4.53	Valores da Função Potência da Carta de Controlo da Amplitude de quantis com transformação Box-Cox	51
4.54	Valores da Função Potência da Carta de Controlo da Amplitude Total de quantis com transformação Box-Cox	51
4.55	Valores da Função Potência da Carta de Controlo da Desvio Absoluto da Média de quantis com transformação Box-Cox	52
A.1	Erro Médio Quadrático da Média para modelos assimétricos	58
A.2	Erro Médio Quadrático da Mediana Total modelos simétricos	59
A.3	Erro Médio Quadrático da Mediana para modelos simétricos	60
A.4	Erro Médio Quadrático da Tri-Média modelos simétricos	61
A.5	Eficiência Relativa da Média para modelos simétricos	62
A.6	Eficiência Relativa da Mediana Total para modelos simétricos	63
A.7	Eficiência Relativa da Mediana para modelos simétricos	64

A.8	Eficiência Relativa da Tri-Média para modelos simétricos . . . . .	65
A.9	Erro Médio Quadrático da Média para modelos assimétricos . . . . .	66
A.10	Erro Médio Quadrático da Mediana Total modelos assimétricos . . . . .	67
A.11	Erro Médio Quadrático da Mediana para modelos assimétricos . . . . .	68
A.12	Erro Médio Quadrático da Tri-Média modelos assimétricos . . . . .	69
A.13	Eficiência Relativa da Média para modelos assimétricos . . . . .	70
A.14	Eficiência Relativa da Mediana Total para modelos assimétricos . . . . .	71
A.15	Eficiência Relativa da Mediana para modelos assimétricos . . . . .	72
A.16	Eficiência Relativa da Tri-Média para modelos assimétricos . . . . .	73
A.17	Variância dos logaritmos do Desvio Padrão para modelos simétricos . . . . .	74
A.18	Variância dos logaritmos da Amplitude Total para modelos simétricos . . . . .	75
A.19	Variância dos logaritmos da Amplitude para modelos simétricos . . . . .	76
A.20	Variância dos logaritmos do Desvio Absoluto da Média para modelos simétricos . . . . .	77
A.21	Eficiência Relativa do Desvio Padrão para modelos simétricos . . . . .	78
A.22	Eficiência Relativa da Amplitude Total para modelos simétricos . . . . .	79
A.23	Eficiência Relativa da Amplitude para modelos simétricos . . . . .	80
A.24	Eficiência Relativa do Desvio Absoluto da Média para modelos simétricos . . . . .	81
A.25	Variância dos logaritmos do Desvio Padrão para modelos assimétricos . . . . .	82
A.26	Variância dos logaritmos da Amplitude Total para modelos assimétricos . . . . .	83
A.27	Variância dos logaritmos da Amplitude para modelos assimétricos . . . . .	84
A.28	Variância dos logaritmos do Desvio Absoluto da Média para modelos assimétricos . . . . .	85
A.29	Eficiência Relativa do Desvio Padrão para modelos assimétricos . . . . .	86
A.30	Eficiência Relativa da Amplitude Total para modelos assimétricos . . . . .	87
A.31	Eficiência Relativa da Amplitude para modelos assimétricos . . . . .	88
A.32	Eficiência Relativa do Desvio Absoluto da Média para modelos assimétricos . . . . .	89

## Índice de Siglas

AAD- Absolute Average Deviation  
ARL- Average Run Length  
BMD- Bootstrap Median  
BR- Bootstrap Range  
 $CN(\alpha, \lambda)$ - Contaminated Normal  
dr- Degree of Robustness  
 $G(\alpha, \beta)$ - Gamma  
LCL- Lower Control Limit  
 $LN(\mu, \sigma)$ - Log-Normal  
 $Log(\mu, s)$ - Logistic  
 $Lp(\mu, b)$ - Laplace  
M- Mean  
MD- Median  
MSE- Mean Square Error  
R- Range  
REF- Relative Efficiency  
SD- Standard Deviation  
SDRL- Standard Deviation of Run Length  
 $t(v)$ - T-Student  
TMD- Total Median  
TR- Total Range  
UCL- Upper Control Limit  
 $W(\lambda, k)$ - Weibull

## 1 Introdução

Para se monitorizarem processos são utilizadas cartas de controlo. Na indústria habitualmente é assumida a normalidade da população à qual pertencem as observações dos processos que estão a ser estudados. No entanto, utilizando cartas de controlo, onde é assumida a normalidade, provoca-se taxas de falsos alarmes demasiado altas, ou demasiado baixas, em relação ao que era esperado. Isto porque, na prática, a população das observações nem sempre é Normal. Para tal há que utilizar cartas de controlo baseadas em estatísticas mais eficientes e robustas. Em relação a estas estatísticas, espera-se que sejam mais resistentes quando existem alterações nos processos industriais.

Em vez de se recorrer à tradicional média amostral, ou à mediana amostral, também se poderá utilizar a mediana total ou a tri-média, sendo estas consideradas mais robustas. Para estimadores de escala temos como estatísticas tradicionais a amplitude e o desvio padrão, em contrapartida para uma estatística mais robusta existe a amplitude total ou o desvio absoluto da média.

Quando a população do processo não é normal, para além da utilização das estatísticas robustas em cartas de controlo, quando necessário, tem-se como opção a utilização de cartas de controlo baseadas na distribuição da população do processo em estudo. Ainda uma terceira opção consiste na aplicação da transformação Box-Cox seguida da utilização de estatísticas clássicas e robustas.

Neste estudo, estes métodos serão analisados e comparados com as cartas de controlo tradicionais de modo a averiguar se apresentam melhores propriedades em termos de robustez e eficiência.

No capítulo 2, serão apresentadas tanto as estatísticas estudadas como as suas características. Irão ser abordadas as estatísticas tradicionais e as novas alternativas para as cartas de controlo. Também são expostas as metodologias usuais para análise de eficiência e robustez das estatísticas quer de localização e de dispersão. Por outro lado, mostraremos as distribuições estudadas e as suas características. Nesta dissertação iremos considerar distribuições simétricas e assimétricas, para podermos analisar o desempenho das estatísticas em dados provenientes de ambos os casos.

Todos os dados utilizados foram gerados a partir de simulações de modo a termos informação proveniente das distribuições em questão e assim conseguirmos analisar a eficiência e robustez em condições adequadas para o efeito. As estatísticas de localização e escala são comparadas a nível da eficiência e da robustez no capítulo 3.

Apresentamos as cartas tradicionais  $3\text{-}\sigma$  e as cartas  $3\text{-}\sigma$  que são baseadas nas novas estatísticas consideradas, no capítulo 4, tal como os conceitos da performance das cartas de controlo. De seguida são evidenciados os dados referentes às taxas de falso alarme das diferentes cartas utilizadas para distribuições simétricas e a capacidade destas cartas de detetarem alterações nos parâmetros em estudo ou seja os valores das funções potência. Iremos analisar uma alternativa às cartas  $3\text{-}\sigma$ , as cartas de quantis das estatísticas para a distribuição dos dados em análise. Para averiguar em que casos se deverá utilizar um género de carta ou outro, as cartas são comparadas em relação à sua eficiência e robustez tal como os requisitos necessários para uma aplicação correta das cartas.

Como última análise, iremos estudar as cartas baseadas na transformação Box-Cox, como vamos considerar apenas os dados sem transformação de localização, estas cartas vão ser aplicadas apenas em dados provenientes de distribuições assimétricas com domínio positivo.

## 2 Elementos de Eficiência e Robustez

### 2.1 Eficiência e Robustez

#### 2.1.1 Assimetria e Peso de Caudas

Para estudar os estimadores em relação à sua eficiência e robustez, ter-se-á em conta características dos modelos de distribuição escolhidos tal como a assimetria e o peso das caudas. Os conceitos sobre eficiência e robustez apresentados são referenciados em Figueiredo e Gomes<sup>[5],[7]</sup>.

Como medida de assimetria existe o coeficiente de assimetria de Fisher, dado por:

$\gamma = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}$  sendo baseado nos 3º's e 2º's momentos centrais ( $\mu_r$ ) do modelo considerado. Também se poderá recorrer ao coeficiente de Bowley também designado por coeficiente de assimetria de quartis,  $\gamma_B = \frac{(F^{-1}(0.75) - F^{-1}(0.5)) - (F^{-1}(0.5) - F^{-1}(0.25))}{F^{-1}(0.75) - F^{-1}(0.25)}$ , calculado à custa das funções inversas da distribuição considerada.

Para o cálculo dos pesos das caudas do modelo recorre-se à seguinte expressão,

$$\tau = \frac{1}{2} \frac{\frac{F^{-1}(0.99) - F^{-1}(0.5)}{F^{-1}(0.75) - F^{-1}(0.5)} + \frac{F^{-1}(0.5) - F^{-1}(0.01)}{F^{-1}(0.5) - F^{-1}(0.25)}}{\frac{\phi^{-1}(0.99) - \phi^{-1}(0.5)}{\phi^{-1}(0.75) - \phi^{-1}(0.5)}}$$

em que  $\phi^{-1}$  representa a função inversa da distribuição Normal standard.

#### 2.1.2 Eficiência dos Estimadores de Localização e Escala

São utilizadas diferentes medidas para comparar a eficiência dos estimadores de localização e de escala. Para os estimadores de localização recorre-se ao erro médio quadrático, denotado por  $MSE(T_n) = E(T_n - \theta)^2$ , em que  $\theta$  representa o parâmetro que teremos como objetivo estimar. Quando se está a analisar estimadores de escala recorre-se à variância do logaritmo do estimador,  $Var(\ln(T_n))$ , isto se pretendemos estimar o desvio padrão. Na análise de eficiência de estimadores de escala não se recorre ao erro médio quadrático porque esta medida depende da escala do estimador.

Entre vários estimadores de um parâmetro de localização, o mais eficiente  $T_{i0}$  é aquele que possuir o menor erro quadrático médio entre o conjunto de estimadores  $\kappa$  para um modelo F e para uma determinada dimensão n. Sendo  $T_n^i$  o i-ésimo estimador do conjunto  $\kappa$ , para a n-ésima dimensão.

$$i_0 = \underset{i \in \kappa}{\operatorname{argmin}} MSE(T_n^i | F)$$

Para os estimadores de escala, o mais eficiente para um determinado modelo e dimensão n, é aquele que possuir a menor variância dos logaritmos das suas estimativas. Isto quando queremos estimar o desvio padrão como é o caso. Iremos considerar  $(T_n^i, i \in \kappa)$  como o conjunto de estimadores presentes.

$$i_0 = \underset{i \in \kappa}{\operatorname{argmin}} Var(\ln T_n^i | F)$$

### 2.1.3 Eficiência Relativa

Para medir o grau de robustez de um estimador há que ter em conta a sua eficiência relativa em relação aos restantes estimadores a serem analisados. Pois o grau de robustez de um estimador é dado pela sua eficiência mínima relativa, tendo em conta os modelos  $F$  a serem estudados e a dimensão da amostra  $n$ .

Denota-se por  $REF$ , a eficiência relativa do estimador  $i$  em relação ao estimador  $j$  para o modelo  $F \in \varsigma$  e para a dimensão  $n$ , sendo  $\varsigma$  o conjunto de modelos utilizados.

$$REF \ T_{i|j}^F = \begin{cases} \frac{MSE(T_n^j|F)}{MSE(T_n^i|F)} \\ \frac{Var(\ln T_n^j|F)}{Var(\ln T_n^i|F)} \end{cases}$$

$$i, j \in \kappa$$

Iremos considerar  $dr(T_n^i)$  como a eficiência relativa mínima de um estimador  $i$  para uma determinada dimensão  $n$ . A eficiência relativa de cada estimador será a eficiência deste, relativa à do melhor estimador para cada  $n$  e  $F$  considerados. Aqui o melhor estimador será  $T_{i_0}$ , definido atrás.

$$dr(T_n^i) = \min_{F \in \varsigma} (REF \ T_{i|i_0}^F)$$

Entre todos os estimadores, aquele que tiver a maior eficiência relativa mínima é considerado o mais robusto.

$$T_n^{i_\kappa}|F \text{ tal que } i_\kappa = \arg \max_{i \in \kappa} (dr(T_n^i))$$

De modo a estudar a eficiência dos estimadores irá recorrer-se a uma simulação que será constituída por  $m$  amostras e por  $r$  replicações para cada dimensão  $n$  e modelo  $F$ . É aconselhado utilizar um  $m$  suficientemente elevado para reduzir o viés e fornecer normalidade assintótica para o estimador. O viés é a diferença entre o valor médio do estimador do parâmetro e o valor do parâmetro,  $B(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$ . Logo quanto menor o viés de um determinado estimador, mais próximo o estimador está do valor teórico do parâmetro. Um estimador diz-se assintoticamente normal quando a sua distribuição se vai aproximando da distribuição Normal à medida que  $n$  cresce.

É calculado o erro médio quadrático para cada uma das replicações sendo  $\widehat{MSE}_i(T_n) = (\frac{1}{m}) \sum_{j=1}^m (t_{n,i}^j - \mu)^2$ ,  $1 \leq i \leq r$  para os estimadores de localização. Para os estimadores de dispersão utilizamos a variância dos logaritmos  $\widehat{VAR} \ln_i(T_n) = (\frac{1}{m}) \sum_{j=1}^m VAR(\ln(t_{n,i}^j))$ ,  $1 \leq i \leq r$ . Assim para cada dimensão e modelo, o erro médio quadrático será a média dos erros médios quadráticos das replicações, sendo o caso dos estimadores de localização e a média das variâncias dos logaritmos dos estimadores de dispersão será  $VAR \ln(T_n) = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \widehat{VAR} \ln_i(T_n)$ .

## 2.2 Estatísticas em Estudo

De entre os vários estimadores existentes, foram escolhidas estatísticas tanto de localização como de escala para se estudar e comparar as suas propriedades. Consideramos um estimador de localização, quando este descreve o valor central de acordo com a informação em análise. Como estimadores de localização considerou-se a média, mediana, mediana total e a tri-média. Um estimador de escala possui sempre valores não negativos, sendo 0 quando todos os valores em análise são iguais. Quanto maior a dispersão da informação num conjunto de dados, maior será o valor do estimador de escala. Como estimadores de escala, escolheu-se a amplitude, o desvio padrão, a amplitude total e o desvio absoluto da média. Algumas destas estatísticas serão aplicadas na construção de cartas de controlo de qualidade. O desvio padrão e a mediana, apenas serão aplicados na análise de eficiência e robustez dos estimadores.

### 2.2.1 Estatísticas Clássicas

Como estatísticas clássicas de localização e usualmente utilizadas em diferentes áreas da estatística, temos a média e a mediana. Em que partindo de uma amostra aleatória  $x_i, 1 \leq i \leq n$  e da sua amostra ordinal correspondente  $(x_{i:n}, 1 \leq i \leq n)$ , sendo a média denotada como  $M = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$  e a mediana como:

$$MD = \begin{cases} X_{m:n} & se \quad n = 2m - 1, \\ (X_{m:n} + X_{m+1:n})/2 & se \quad n = 2m, \end{cases}$$

Para estatísticas de escala teremos o desvio padrão, denotado como  $SD = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$  e a amplitude  $R = X_{n:n} - X_{1:n}$ .

### 2.2.2 Mediana Total

A Mediana Total é uma estatística de localização referida em Figueiredo e Gomes<sup>[5],[7],[6],[8]</sup>. Tendo uma amostra aleatória  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , de dimensão  $n$ , obtida a partir de um determinado processo, representada por  $X$  com uma (d.f) distribuição  $F$ , seja  $(X_{i:n}, 1 \leq i \leq n)$  a respetiva amostra ordenada e  $(X_i^*, 1 \leq i \leq n)$  a amostra bootstrap. A amostra bootstrap é uma amostra de replicações independentes e identicamente distribuídas geradas a partir de uma variável aleatória  $X^*$  com função de distribuição  $F_n^*(x) = \sum_{i=1}^n I_{x_i \leq x}/n$ , a função de distribuição empírica da amostra observada em que  $I_A = 1$ , quando o acontecimento  $A$  ocorre e  $I_A = 0$ , caso contrário. Para o cálculo da mediana total é necessário recorrer à mediana bootstrap.

BMD será a notação utilizada para definir a mediana bootstrap.

$$BMD = \begin{cases} X_{m:n}^* & se \quad n = 2m - 1, \\ (X_{m:n}^* + X_{m+1:n}^*)/2 & se \quad n = 2m, \end{cases}$$

para  $m=1,2,\dots$

Sendo  $X_{i:n}^*$  o valor correspondente à  $i$  ésima estatística ordinal e relativamente à amostra boots-

trap designada como  $X_i^*$  para  $1 \leq i \leq n$

Definindo  $\alpha_{ij} = P(BMD = \frac{x_{i:n} + x_{j:n}}{2})$ ,  $1 \leq i \leq j \leq n$ , em que a mediana total "TMD" (Total Median) será dada por  $TMD = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \alpha_{ij} (\frac{x_{i:n} + x_{j:n}}{2})$

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{n^n} \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} \frac{n!(i-1)^k}{k!(n-k)!} \sum_{r=[n/2]-k+1}^{(n-k)!(n-i)^{n-k-r}} \frac{(n-k)!}{r!(n-k-r)!}, & 1 \leq i = j \leq n \\ \frac{n!(i^{n/2} - (i-1)^{n/2})((n-j+1)^{n/2} - (n-j)^{n/2})}{n^n((n/2)!)^2} & n \text{ impar e } 1 \leq i < j \leq n \\ 0, & n \text{ par e } 1 \leq i < j \leq n \end{cases}$$

$[x]$  representa a parte inteira de  $x$

A mediana total também pode ser calculada a partir da combinação linear da amostra  $X_{i:n}$  com os coeficientes  $a_i$ , sendo  $TMD = \sum_{i=1}^n a_i X_{i:n}$ , em que os coeficientes  $a_i$  são calculados a partir da seguinte expressão:

$$a_i = \frac{1}{2} (\sum_{j=i}^n \alpha_{ij} + \sum_{j=1}^i \alpha_{ji})$$

Tabela 2.1: Valores dos  $a_i$  para  $n \leq 10$

i n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1.000	0.500	0.259	0.156	0.058	0.035	0.01	0.007	0.001	0.001
2		0.500	0.482	0.344	0.259	0.174	0.098	0.064	0.029	0.019
3			0.259	0.344	0.366	0.291	0.239	0.172	0.115	0.078
4				0.156	0.259	0.291	0.306	0.257	0.221	0.168
5					0.058	0.174	0.239	0.257	0.268	0.234
6						0.035	0.098	0.172	0.221	0.234
7							0.01	0.064	0.115	0.168
8								0.007	0.029	0.078
9									0.001	0.019
10										0.001

Os  $a_i$  possuem várias propriedades. Sendo que  $a_i = a_{n-i+1}$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $0 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{[n/2]}$ ,  $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ . Existe simetria entre os seus valores e a soma será 1. A combinação linear entre os  $a_i$  e a amostra, faz com que os valores da amostra recebam pesos, sendo que os valores centrais possuem maiores pesos em relação aos extremos. Este fator reduz a influência de outliers, o que garante robustez à mediana total.

### 2.2.3 Tri-Média

A TM, referida em Tukey, W.<sup>[14]</sup>, é uma estatística de localização. Sendo uma média pesada da mediana, 1º quartil e 3º quartil. A mediana possui o dobro do peso de qualquer um dos quartis. É considerada robusta pois não sofre qualquer influência de outliers, dando um maior peso à mediana e menor aos quartis consegue-se maior influência do centro (o dobro) e metade



do 1º e 3º Quartil da amostra. Tukey considera esta estatística como uma forma de trazer mais informação do que apenas se utilizarmos a mediana. Esta estatística pode ser representada por:

$$TM = \frac{(Q_1 + 2Q_2 + Q_3)}{4}, \text{ sendo } Q_1 \text{ o 1º quartil, } Q_2 \text{ a mediana e } Q_3 \text{ o 3º quartil da amostra.}$$

#### 2.2.4 Amplitude total

São apresentados alguns conceitos sobre a amplitude total já publicados em Figueiredo e Gomes<sup>[7],[6]</sup>. Partindo da amostra bootstrap, tal como na mediana total, para o cálculo da amplitude total teremos que recorrer à amplitude bootstrap que será dada por:  $BR = X_{n:n}^* - X_{1:n}^* | x_{n:n}^* - x_{1:n}^*$ .

Os coeficientes  $\beta_{ij} = P(BR = x_{j:n} - x_{i:n})$  são dados por:

$$\beta_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{r=1}^{n-k} \frac{n!}{k!r!(n-k-r)!} \left(\frac{1}{n}\right)^{k+r} \left(\frac{j-i-1}{n}\right)^{n-k-r}, & 1 \leq i \leq j-1 \leq n-1 \\ \left(\frac{1}{n}\right)^n, & 1 \leq i = j \leq n \end{cases}$$

Será utilizada a notação "TR" (Total Range) como referência à amplitude total, definida por:  $TR = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \beta_{ij} (X_{j:n} - X_{i:n})$

Tal como a mediana total, a amplitude total também pode ser calculada a partir da combinação linear da amostra  $x$  com os coeficientes  $b_i$ .

$$TR = \sum_{i=1}^n b_i X_{i:n},$$

$$b_i = \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ji} - \sum_{j=i+1}^n \beta_{ij}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

$$\sum_{i=1}^n b_i = 0,$$

$$b_i = -b_{n-i+1}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Os  $b_i$  tal como os  $a_i$  são independentes do modelo subjacente, apenas dependem da dimensão da amostra.

Tabela 2.2: Valores dos  $b_i$  para  $n \leq 10$ 

i n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.000	-0.5	-0.667	-0.680	-0.672	-0.665	-0.660	-0.656	-0.654	-0.651
2		0.5	0.000	-0.195	-0.240	-0.246	-0.245	-0.243	-0.242	-0.241
3			0.667	0.195	0.000	-0.058	-0.072	-0.076	-0.078	-0.079
4				0.680	0.240	0.058	0.00	-0.016	-0.020	-0.022
5					0.672	0.246	0.072	0.016	0.000	-0.004
6						0.665	0.245	0.076	0.020	0.004
7							0.660	0.243	0.078	0.022
8								0.656	0.242	0.079
9									0.654	0.241
10										0.651

### 2.2.5 Desvio Absoluto da Média

O desvio absoluto da média é uma estatística de dispersão cujo ponto central é a média amostral. É a média dos valores absolutos das diferenças entre cada valor da amostra e a média. Outras vertentes desta estatística existem tal como o desvio absoluto da mediana ou então da moda. É feita referência a esta estatística em Stadtler H., Kilger, C. Meyr, H. <sup>[13]</sup> e Franklin <sup>[11]</sup>. Iremos utilizar AAD como notação para referirmo-nos ao Desvio Absoluto da Média.

O Desvio Absoluto da Média é calculado a partir da expressão:  $AAD = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|}{n}$

## 2.3 Distribuições em Estudo

De modo a obter vasta informação a nível dos modelos para se conseguir analisar o comportamento dos estimadores, irá recorrer-se a diversas distribuições, tanto simétricas como assimétricas. No entanto apenas vamos considerar distribuições contínuas.

### 2.3.1 Modelos Simétricos

#### Normal, $N(\mu, \sigma)$

A distribuição Normal é considerada a mais importante e utilizada na área da estatística. Também é designada como Distribuição Gaussiana devido ao trabalho do matemático Karl Friedrich Gauss. Os seus parâmetros são  $\mu$ , o valor médio e  $\sigma$ , o desvio padrão. A média, a mediana e a moda podem ser considerados estimadores de  $\mu$ . Esta distribuição é mais densa no centro e menos nas suas caudas. Aqui apenas iremos considerar a Normal Standard, com função densidade probabilidade:  $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ ,  $x \in \mathbb{R}$   $\sigma > 0$

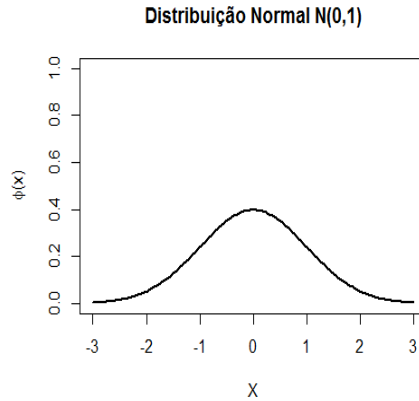


Figura 2.1: Função Densidade de Probabilidade da  $N(0,1)$

### T-Student, $t(v)$

A T-student é uma família de distribuições cuja forma da função densidade de probabilidade é semelhante à da normal. Habitualmente é utilizada em vez da Normal quando se está perante amostras com pequena dimensão ( $n \leq 30$ ). Esta distribuição apenas tem um parâmetro que é o número de graus de liberdade ( $v$ ). À medida que este valor aumenta, a distribuição T torna-se mais próxima da distribuição  $N(0,1)$ . O seu valor médio é sempre 0, independentemente do número de graus de liberdade, com f.d.p:  $f_t(t) = \frac{\Gamma((v+1)/2)}{\sqrt{\pi(v-2)}\Gamma(v/2)}(1 + \frac{t^2}{v-2})^{-(v+1)/2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \in (v > 0)$

Exemplifica-se com a função densidade de probabilidade de uma  $t(15)$ .

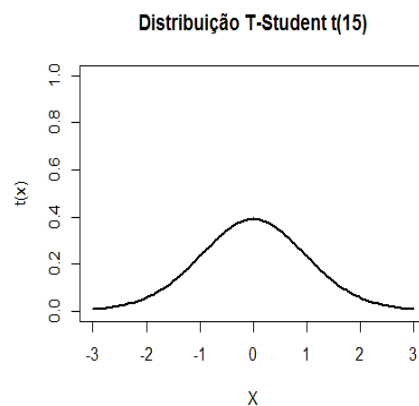


Figura 2.2: Função Densidade de Probabilidade da  $t(15)$

### Logística, $Log(\mu, s)$

A distribuição Logística é relativamente semelhante à distribuição Normal na forma. No entanto a distribuição logística tem caudas mais pesadas. Esta depende de dois parâmetros,  $\mu$  como parâmetro de localização e  $s$  como parâmetro de escala. A média, a mediana e a moda são considerados estimadores de  $\mu$ . Também é considerada como um caso especial da distribuição

Tukey Lambda. Tem como f.d.p  $f(\mu, s) = \frac{e^{-\frac{x-\mu}{s}}}{s(1+e^{-\frac{x-\mu}{s}})^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $s > 0$

Aqui apenas iremos utilizar a  $\text{Log}(0,1)$ , cuja função densidade de probabilidade é apresentada abaixo.

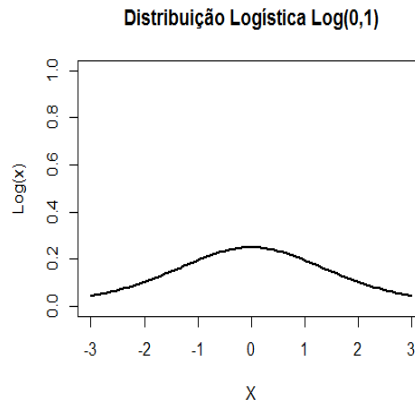


Figura 2.3: Função Densidade de Probabilidade da  $\text{Log}(0,1)$

### Laplace, $Lp(\mu, b)$

A Distribuição Laplace também pode ser designada como a Distribuição Exponencial Dupla, por ser baseada em duas distribuições exponenciais e ainda com um parâmetro de localização  $\mu$  e de escala  $b$ . A média, a mediana e a moda são considerados estimadores de  $\mu$ . O seu nome provém do matemático Pierre-Simon Laplace. Tem como f.d.p:  $Lp(\mu, b) = \frac{1}{2b}e^{(-\frac{|x-\mu|}{b})}$ ,  $x \in \mathbb{R}$

Apenas utilizaremos a  $Lp(0,1)$ , com f.d.p representada abaixo.

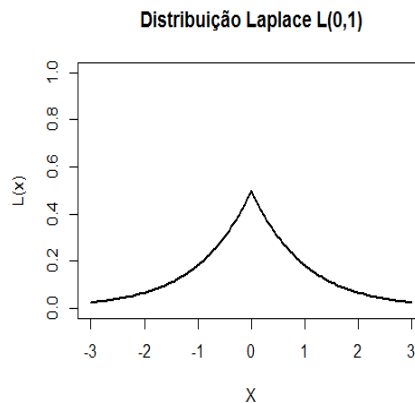


Figura 2.4: Função Densidade de Probabilidade da  $Lp(0,1)$

### Normal Contaminada, $CN(\alpha, \lambda)$

Existem várias Distribuições Normais Contaminadas, que serão de modo geral uma combinação de distribuições Normais com parâmetros que contaminam a informação. A contaminação provoca um aumento no peso das caudas. A Normal contaminada tem dois parâmetros,  $\alpha$ , a proporção de informação contaminada e  $\lambda$ , o parâmetro que provoca a contaminação. Quanto maior  $\lambda$  e  $\alpha$  maior a contaminação e maior o peso das caudas. Como f.d.p da  $CN(\alpha, \lambda)$

teremos:  $f(x) = (1 - \alpha)\phi(x) + \alpha\phi(x/\lambda)$ ,  $x \in \mathbb{R}$

Vamos utilizar a  $CN(\alpha, \lambda)$  com diferentes parâmetros tal como por exemplo  $CN(0.3, 4)$

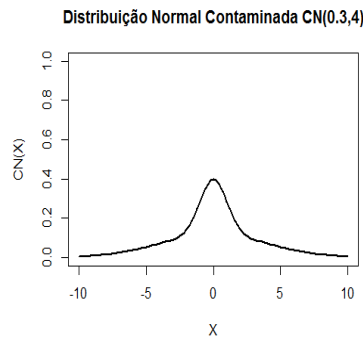


Figura 2.5: Função Densidade de Probabilidade da  $CN(0.3, 4)$

### 2.3.2 Modelos Assimétricos

#### Qui-Quadrado, $\chi^2(k)$

A distribuição Qui-Quadrado( $k$ ) é a distribuição da soma de  $k$  quadrados de várias normais standard independentes. O seu único parâmetro  $k$ , é o número de graus de liberdade e também o número de distribuições normais standard e independentes a serem somadas. A média é um estimador do número de graus de liberdade. A sua f.d.p é dada por:  $f(x) = \frac{1}{2^{v/2}\Gamma(v/2)}x^{v/2-1}e^{-x/2}$  para  $x \geq 0$  ( $k \leq 0$ )

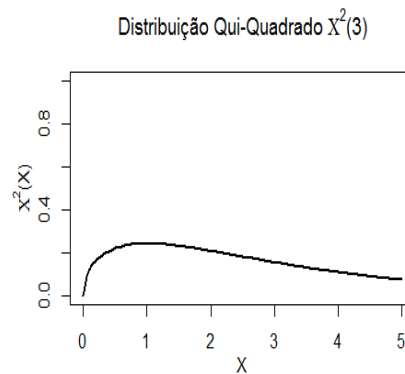


Figura 2.6: Função Densidade de Probabilidade da  $\chi^2(3)$

#### Log-Normal, $LN(\mu, \sigma)$

A distribuição Log-Normal é a distribuição de probabilidade de uma variável cujo logaritmo segue a distribuição Normal. Tem dois parâmetros, o valor médio  $\mu$  como parâmetro de localização e valor médio do logaritmo, e  $\sigma$  como parâmetro de escala e desvio padrão do logaritmo.

A sua f.d.p é dada por:  $LN(\mu, \sigma^2) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}$  para  $x \geq 0$   
 Como exemplo temos representada a f.d.p de  $LN(0,1)$

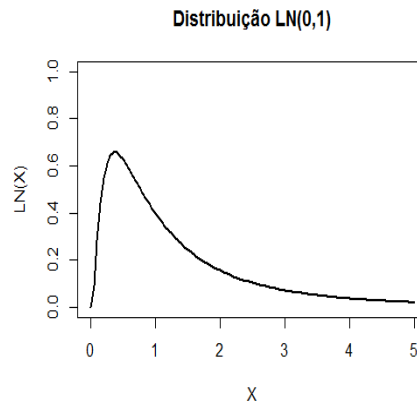


Figura 2.7: Função Densidade de Probabilidade da  $LN(0,1)$

### Gamma, $G(\alpha, \beta)$

A distribuição Gamma é uma distribuição contínua com domínio positivo e com dois parâmetros. Tem um parâmetro de forma  $\alpha$  e um parâmetro de escala  $\beta$ . A função exponencial é um caso especial da Gamma, quando  $\alpha = 1$ . O seu valor médio é dado por  $\alpha/\beta$  e a sua variância  $\alpha/\beta^2$ . A sua f.d.p é dada por:  $G(\alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$  para  $x \geq 0$

Como exemplo apresenta-se a f.d.p da  $G(0.5,1)$

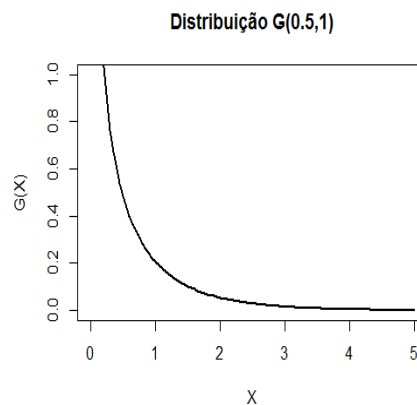


Figura 2.8: Função Densidade de Probabilidade da  $G(0.5,1)$

### Weibull, $W(\lambda, k)$

Apesar de haver uma parametrização da Weibull com três parâmetros, aqui apenas iremos considerar a parametrização de dois parâmetros. Sendo  $k$  o parâmetro de forma e  $\lambda$  o parâmetro de escala. O seu valor médio é dado por  $\lambda\Gamma(1 + 1/k)$  e a variância  $\lambda^2[\Gamma(1 + 2/k) - (\Gamma(1 + 1/k))^2]$

$1/k))^2]$ . Nesta parametrização não se considera o parâmetro de localização. Como f.d.p tem-se:  
 $W(\lambda, k) = \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-(x/\lambda)^k}$  para  $x \geq 0$   
 Apresenta-se  $W(0.75,1)$  como exemplo

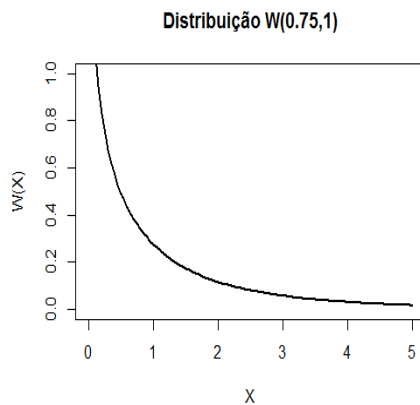


Figura 2.9: Função Densidade de Probabilidade da  $W(0.75,1)$

### 3 Análise da Eficiência e Robustez das Estatísticas

#### 3.1 Análise da Eficiência e Robustez das Estatísticas de Localização

##### 3.1.1 Simulação

Para se realizar esta análise foi necessário recorrer a simulações de valores aleatórios provenientes das distribuições apresentadas. Consideraram-se 2500 amostras para cada dimensão de  $n=3$  a  $n=20$  e para cada distribuição considerada. Também foram realizadas 20 replicações. Para cada distribuição e dimensão é calculado o erro médio quadrático para cada estimador de localização. Neste caso o objetivo é estimar o valor médio.

Apresenta-se o estimador mais eficiente ou seja aquele que possuir o menor valor na média dos erros médios quadráticos calculados nas replicações, para cada dimensão e distribuição. Para estimadores do valor médio foram estudadas as estatísticas: média, mediana total, mediana e tri-média. Em todas as distribuições simétricas estudadas, o valor médio é  $\mu_0=0$ .

##### 3.1.2 Análise da Eficiência e Robustez em Distribuições Simétricas

Com base na tabela relativa às distribuições simétricas [Tabela 3.1], verificamos que a média é o estimador mais eficiente nas distribuições estudadas com menor peso de caudas  $[N(0,1), t(15), t(10)]$ . No caso da distribuição Normal, é o estimador mais eficiente independentemente da dimensão das amostras. À medida que o peso das caudas vai aumentando, a mediana total mostra sendo mais eficiente em relação aos restantes estimadores para amostras de pequena dimensão ( $n=3$  até  $n=9$ ).

Para dimensões superiores das amostras, a tri-média é considerada mais eficiente nas distribuições desde  $t(8)$  a  $t(4)$ . Quando o peso das caudas aumenta, a tri-média torna-se mais eficiente para pequenas amostras e a mediana torna-se o estimador mais eficiente para pequenas amostras e a partir da distribuição  $CN(0.3,5)$ . Para amostras de dimensões superiores e distribuições desde Laplace(0,1) até  $CN(0.3,8)$ , a mediana total é mais eficiente. Quando o peso das caudas vai atingindo valores mais elevados a mediana torna-se cada vez mais eficiente tanto para pequenas amostras ou grandes.

A nível da robustez [Figura 3.1], para pequenas amostras ( $n=3,4,5$ ), a tri-média é o estimador mais robusto, no entanto a sua robustez vai diminuindo à medida que a dimensão das amostras aumenta. Para dimensões superiores ( $n=6$  a  $n=13$ ), a mediana é o estimador mais robusto. Para dimensões superiores a 15 a mediana total é o estimador mais robusto. A média é considerada o estimador menos robusto para todas as dimensões estudadas. Verifica-se uma diferença na robustez da mediana quando estamos perante uma dimensão par ou ímpar.

Os valores correspondentes aos erros médios quadráticos e à eficiência relativa dos estimadores podem ser consultados nos anexos desde a [Tabela A.1] até à [Tabela A.8].

##### 3.1.3 Análise da Eficiência e Robustez em Distribuições Assimétricas

Em relação às distribuições Gamma e Weibull, o parâmetro de escala  $\beta$  será 1, apenas o parâmetro de forma é que é diferente entre os modelos. Para a Log-Normal, o parâmetro de localização  $\mu$  será 0, apenas iremos considerar diferentes valores para o parâmetro de dispersão  $\sigma$ .



Tabela 3.1: Estimadores mais eficientes por distribuição simétrica e dimensão

Modelo	$\tau$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
N(0,1)	1	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M
t(15)	1,092	TMD	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M
t(10)	1,145	TMD	TMD	TMD	TMD	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M
t(9)	1,164	TMD	TMD	TMD	TMD	TMD	TMD	TMD	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M
t(8)	1,189	TMD	TMD	TMD	TMD	TMD	TMD	TMD	TM	TM	TM	TM	TM	TM	TM	M	TM	TM	TM
Log(0,1)	1,213	TMD	TMD	TMD	TMD	TMD	TMD	TMD	TM	TMD	TM	TMD	TM	TM	TM	TM	TM	TM	TM
t(6)	1,27	TMD	TMD	TMD	TMD	TMD	TMD	TMD	TM	TM	TM	TMD	TM	TM	TM	TM	TM	TM	TM
CN(0.3,2)	1,319	TMD	TMD	TMD	TMD	TMD	TMD	TMD	TM	TMD	TM	TMD	TM	TM	TM	TM	TM	TM	TM
t(4)	1,467	TM	TM	TM	TM	TMD	TM	TMD	TMD	TMD	TM	TMD	TM	TM	TM	TM	TMD	TM	TM
Lp(0,1)	1,636	TM	TM	TM	TM	TMD	TM	TMD	TMD	TMD	TMD	TMD	TMD	TMD	TMD	TMD	TMD	TMD	TMD
t(3)	1,721	TM	MD	TM	TM	TMD	TM	TMD	TMD	TMD	TMD	TMD	TMD	TMD	TMD	TMD	TMD	TMD	TMD
CN(0.3,3)	1,835	TM	MD	TM	TM	TMD	TM	TMD	TMD	TMD	TMD	TMD	TMD	TMD	TMD	TMD	TMD	TMD	TMD
CN(0.3,4)	2,331	TM	MD	TM	MD	MD	MD	TMD	MD	TMD	TMD	TMD	TMD	TMD	TMD	TMD	TMD	TMD	TMD
CN(0.3,5)	2,853	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	TMD	MD	TMD	TMD	TMD	TMD	TMD	TMD	TMD	TMD
CN(0.3,6)	3,344	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	TMD	MD	TMD	TMD	TMD	TMD	TMD	TMD
CN(0.3,7)	3,847	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	TMD	TMD	TMD
CN(0.3,8)	4,336	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	TMD	MD	TMD
CN(0.3,9)	4,842	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	TMD
CN(0.3,10)	5,335	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	TMD
CN(0.3,11)	5,838	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD
CN(0.3,12)	6,344	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD
CN(0.3,13)	6,834	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD	MD

M-Média TMD-Mediana Total MD-Mediana TM-Tri Média

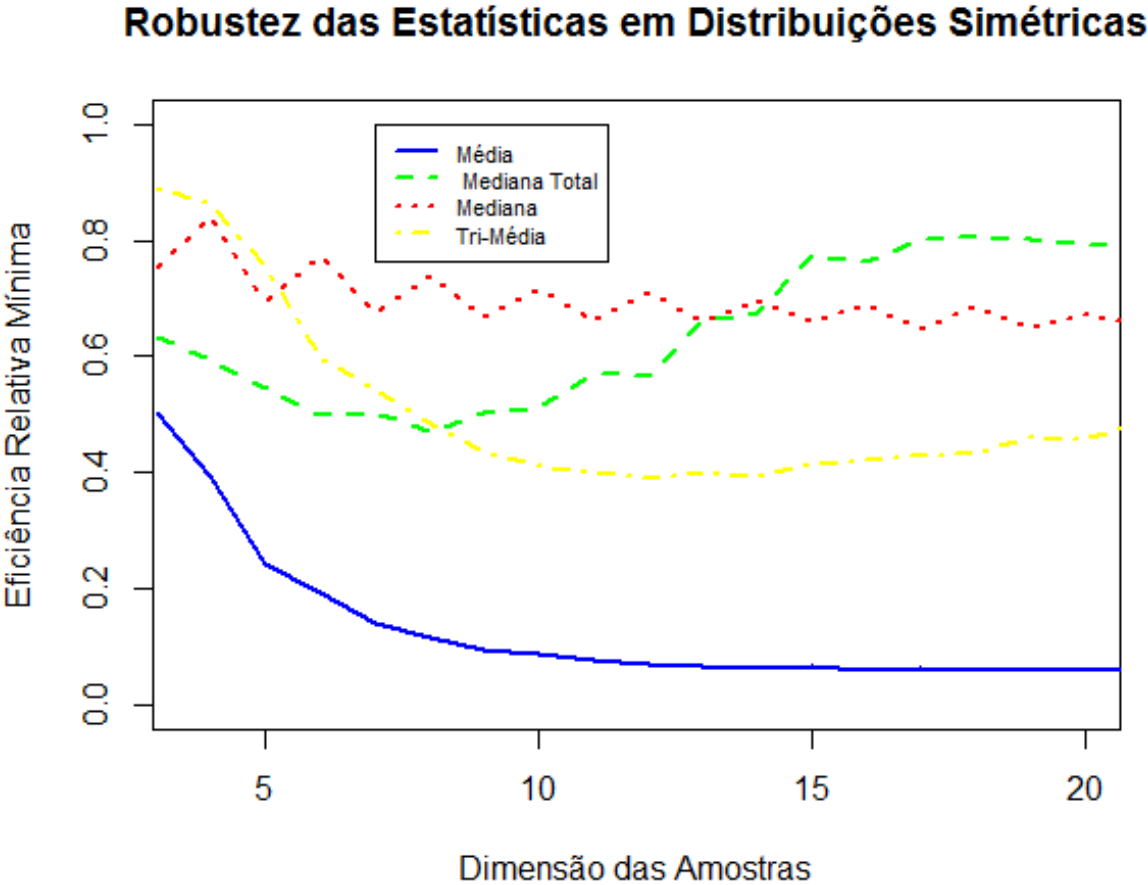


Figura 3.1: Grau da Robustez das Estatísticas de Localização para as Distribuições Simétricas e Dimensões consideradas

Tabela 3.2: Estimadores mais eficientes por distribuição assimétrica e dimensão

Modelo	$\tau$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\chi^2(20)$	1,0018	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M
$\chi^2(15)$	1,0026	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M
$\chi^2(10)$	1,0044	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M
$\chi^2(9)$	1,0051	TMD	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M
$\chi^2(5)$	1,0126	TMD	TMD	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M
$\chi^2(4)$	1,0182	TMD	TMD	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M
G(1)	1,0624	TMD	TMD	TMD	TMD	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M
G(0.75)	1,1055	TMD	TMD	TMD	TMD	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M
$\chi^2(1)$	1,2183	TM	TM	TMD	TMD	TMD	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M
W(0.75)	1,3052	TM	TM	TMD	TMD	TMD	TMD	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M
LN(0.8)	1,3942	TM	TM	TMD	TMD	TMD	TMD	TMD	TM	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M
LN(0.9)	1,5146	TM	TM	TMD	TMD	TMD	TMD	TMD	TM	TM	TM	M	M	M	M	M	M	M	M
LN(1)	1,6576	TM	TM	TMD	TMD	TMD	TMD	TMD	TM	TM	TM	M	M	M	M	M	M	M	M
LN(1.1)	1,8266	TM	TM	TMD	TMD	TMD	TMD	TMD	TM	TM	TM	TM	M	M	M	M	M	M	M
LN(1.2)	2,0254	MD	TM	TM	TMD	TMD	TMD	TMD	TM	TM	TM	TM	TM	TM	TM	M	M	M	M
W(0.5)	2,2598	TM	TM	TMD	TMD	TMD	TMD	TMD	TM	TM	TM	M	M	M	M	M	M	M	M
LN(1.4)	2,5322	MD	MD	TM	TMD	TMD	TMD	TMD	TM	TM	TM	TM	TM	TM	TM	TM	TM	TM	TM
LN(1.5)	2,8521	MD	MD	TM	TM	TMD	TMD	TMD	TM	TM	TM	TM	TM	TM	TM	TM	TM	TM	TM
LN(1.6)	3,2262	MD	MD	TM	TM	TMD	TMD	TMD	TM	TM	TM	TM	TM	TM	TM	TM	TM	TM	TM
LN(1.7)	3,6635	MD	MD	TM	TM	TMD	TMD	TMD	TM	TM	TM	TM	TM	TM	TM	TM	TM	TM	TM
LN(2)	5,4707	MD	MD	TM	TM	TMD	TMD	TMD	TM	TM	TM	TM	TM	TM	TM	TM	TM	TM	TM
LN(2.2)	7,2432	MD	MD	TM	MD	TM	TMD	TMD	TM	TM	TM	TM	TM	TM	TM	TM	TM	TM	TM

M-Média TMD-Mediana Total MD-Mediana TM-Tri Média

Na tabela referente às distribuições assimétricas [Tabela 3.2], é possível observar que nos casos em que existe menor peso de caudas o estimador mais eficiente para o valor médio é a média, independente de  $n$ . À medida que o peso das caudas aumenta, o estimador mais eficiente é a mediana total para pequenas amostras. A mediana total mostra-se como sendo mais eficiente à medida que a dimensão e peso das caudas aumenta até  $n=9$ . Quando o peso das caudas aumenta ainda mais, o estimador mais eficiente para pequenas amostras é a tri-média. Nas dimensões superiores existe maior eficiência por parte da média. Para as distribuições mais pesadas e para pequenas amostras ( $n=3,4$ ) a mediana é mais eficiente.

Quando temos distribuições mais pesadas ( $\tau > 2.5$ ), para maiores dimensões ( $n > 10$ ) a tri-média é o estimador com maior eficiência. Ao contrário das outras estatísticas a tri-média no que toca a eficiência está separada em conjuntos diferentes. Para amostras de maior dimensão de modelos com caudas mais pesadas e para amostras mais pequenas, de distribuições com caudas mais pesadas ( $\tau > 1.2$ ).

Comparando a [Tabela 3.2] e a [Tabela 3.1], podemos ficar com a ideia de que a média é muito mais eficiente para distribuições assimétricas do que simétricas. No entanto as distribuições assimétricas escolhidas são de geral modo mais leves do que as simétricas. Valores simulados referentes aos erros médios quadráticos e eficiência relativa dos estimadores poderão ser consultados desde a [Tabela A.9] à [Tabela A.16]

Em relação à robustez [Figura 3.2], a mediana mostra maior robustez para amostras de pequena dimensão ( $n=3,4$ ), sendo que a mediana total é mais robusta em algumas dimensões superiores ( $n=7,8$ ) e nas restantes dimensões, a tri-média é o estimador mais robusto. A média mostra ser praticamente pouco robusta quando se trata de distribuições assimétricas. Verifica-se um aumento da sua robustez para dimensões superiores. Para amostras mais pequenas encontram-se as oscilações da mediana na robustez entre dimensões pares e ímpares.

Com base em diferentes estudos já realizados Figueiredo, F e Gomes, M.I. [5],[7],[8], tem-se por certo de que a média é eficiente em modelos simétricos com um coeficiente baixo relativamente ao peso das caudas, quando se tem como objetivo estimar o valor médio, sendo eficiente em qualquer dimensão da amostra. Em amostras de pequena dimensão, provenientes de modelos

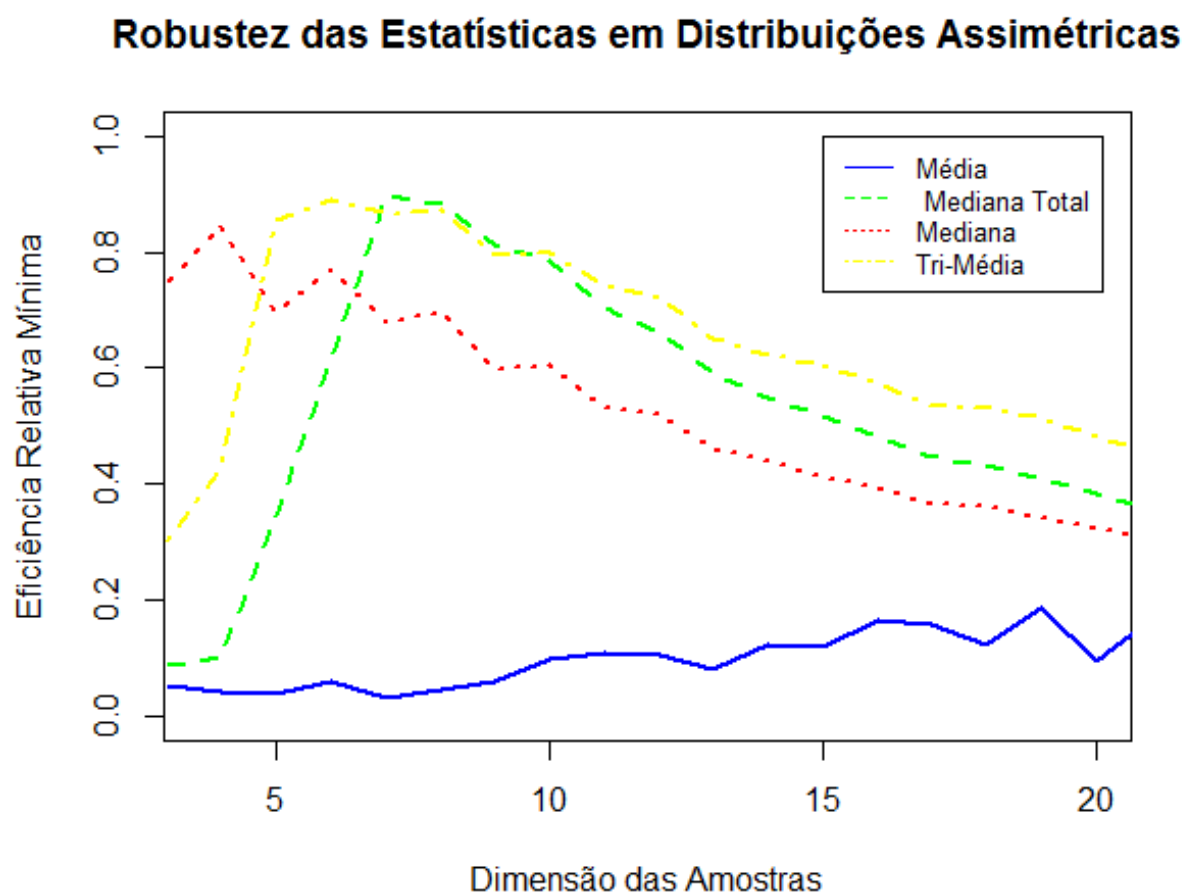


Figura 3.2: Grau da Robustez das Estatísticas de Localização para as Distribuições Assimétricas e Dimensões consideradas

simétricos com grande peso de caudas foi verificado que a mediana é superior relativamente à eficiência. No caso de as amostras já terem dimensões superiores e as características anteriormente referidas a mediana total é considerada um estimador eficiente. Os resultados do nosso estudo corroboram com as conclusões dos autores.

### 3.2 Análise da Eficiência e da Robustez das Estatísticas de Dispersão

#### 3.2.1 Simulação

A simulação realizada para a análise da eficiência e da robustez dos estimadores de dispersão seguiu exatamente os mesmos passos aplicados para os estimadores de localização. Como o objetivo aqui é estimar o desvio padrão, em vez de se utilizar o erro médio quadrático, recorreu-se à variância dos logaritmos das estatísticas.

Relativamente aos estimadores de dispersão, são apresentados na [Tabela 3.3] os estimadores mais eficientes para a estimação do desvio padrão em cada dimensão e modelo simétrico. Na [Tabela 3.4] são apresentados os estimadores mais eficientes para a estimação do desvio padrão para os modelos assimétricos.

#### 3.2.2 Análise da Eficiência e Robustez em Distribuições Simétricas

Partindo da tabela [Tabela 3.3] referente aos estimadores mais eficientes de dispersão para as distribuições simétricas, observa-se que para distribuições com caudas menos pesadas o estimador mais eficiente é o desvio padrão. Para amostras de pequena dimensão  $n=3$  a amplitude revela-se ser mais eficiente quando o peso das caudas aumenta. Para  $n=4,5$ , já se verifica uma eficiência superior por parte da amplitude total. O desvio padrão volta a mostrar-se como a estatística mais eficiente para amostras de dimensões superiores com distribuições de caudas mais pesadas.

Quando os pesos das caudas não são nem muito elevados nem muito baixos e as dimensões das amostras já são superiores a  $n=5$  o desvio absoluto da média é a estatística mais eficiente. Os valores correspondentes às variâncias dos logaritmos dos estimadores, podem ser observados nos anexos desde a [Tabela A.17] até à [Tabela A.20] .

Tabela 3.3: Estimadores mais eficientes por distribuição simétrica e dimensão

Modelo	$\tau$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
N(0,1)	1.000	SD	SD	SD	SD	SD	SD	SD	SD	SD	SD	SD	SD	SD	SD	SD	SD	SD	SD
t(15)	1.092	SD	SD	TR	SD	SD	SD	SD	SD	SD	SD	SD	AAD	SD	SD	SD	SD	SD	SD
t(10)	1.145	SD	TR	SD	SD	SD	SD	SD	SD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD
t(9)	1.164	SD	SD	TR	SD	AAD	SD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD
t(8)	1.189	SD	SD	SD	SD	AAD	SD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD
Log(0,1)	1.213	SD	TR	SD	AAD	AAD	SD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD
t(6)	1.270	SD	TR	TR	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD
CN(0.3,2)	1.319	SD	TR	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD
t(4)	1.467	R	TR	TR	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD
Lp(0,1)	1.636	R	TR	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD
t(3)	1.721	R	TR	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD
CN(0.3,3)	1.835	TR	TR	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD
CN(0.3,4)	2.331	R	TR	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD
CN(0.3,5)	2.853	R	TR	TR	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD
CN(0.3,6)	3.344	R	TR	TR	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD
CN(0.3,7)	3.847	R	TR	TR	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD
CN(0.3,8)	4.336	R	TR	TR	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD
CN(0.3,9)	4.842	R	TR	TR	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD
CN(0.3,10)	5.335	R	TR	TR	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD
CN(0.3,11)	5.838	R	TR	TR	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	SD
CN(0.3,12)	6.344	R	TR	TR	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	SD	SD	SD	SD	SD	SD
CN(0.3,13)	6.834	R	TR	TR	TR	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	SD	SD	SD	SD	SD

SD-Desvio Padrão TR-Amplitude Total R-Amplitude AAD-Desvio Absoluto da Média

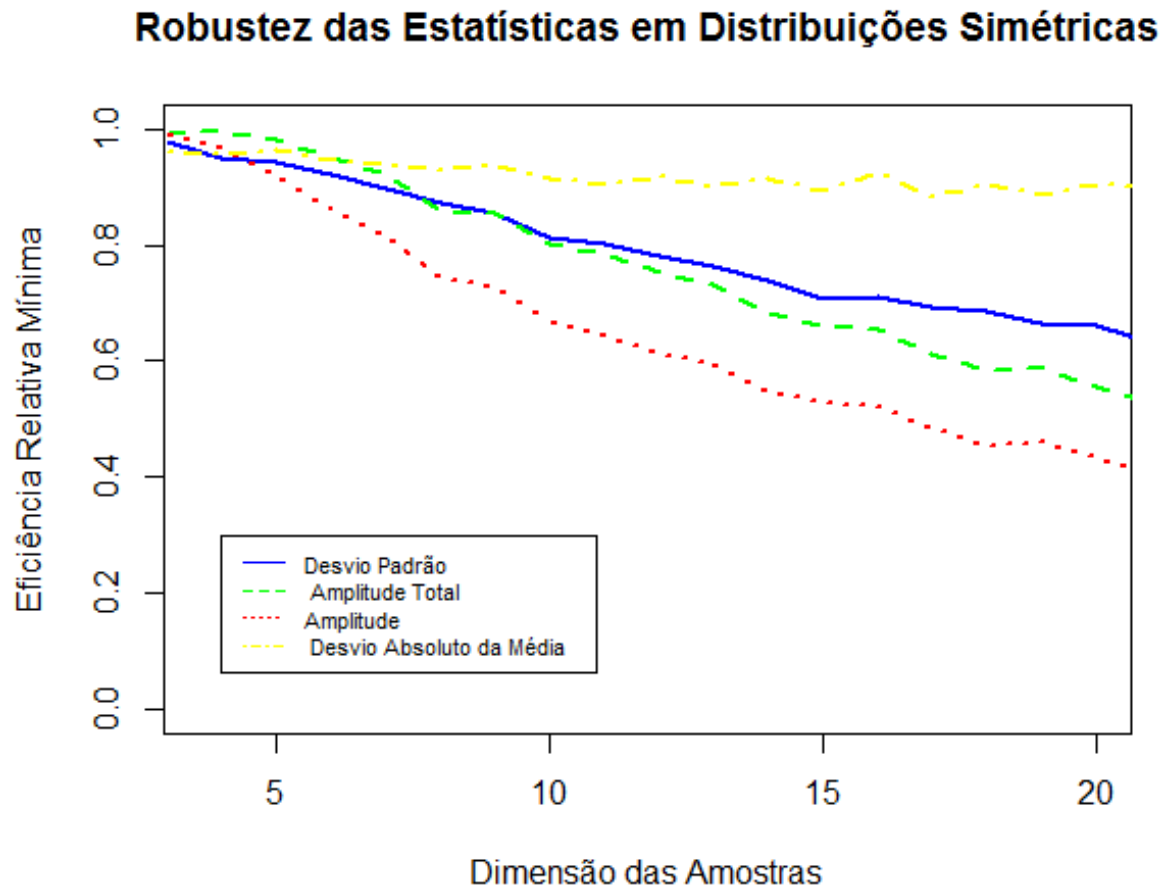


Figura 3.3: Grau da Robustez das Estatísticas de Escala para as Distribuições Simétricas e Dimensões consideradas

Em relação ao grau da robustez dos estimadores em distribuições simétricas [Figura 3.3], o desvio absoluto da média verifica-se como sendo o estimador mais robusto para a maioria das dimensões. A amplitude total é considerada o estimador mais robusto para  $n=3$  e 4. A amplitude é o estimador menos robusto para a maioria das dimensões. Para dimensões relativamente pequenas não existem grandes diferenças entre as eficiências relativas mínimas dos estimadores. Os valores das eficiências relativas dos estimadores podem ser consultados desde a [Tabela A.29] até à [Tabela A.32].

### 3.2.3 Análise da Eficiência e Robustez em Distribuições Assimétricas

Tabela 3.4: Estimadores mais eficientes por distribuição assimétrica e dimensão

Modelo	$\tau$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\chi^2(20)$	1,0018	SD	TR	TR	TR	TR	TR	TR	SD	SD	SD	SD	SD	SD	SD	SD	SD	SD	SD
$\chi^2(15)$	1,0026	TR	TR	TR	TR	TR	TR	TR	SD	SD	SD	SD	SD	SD	SD	SD	SD	SD	SD
$\chi^2(10)$	1,0044	R	TR	TR	TR	TR	TR	TR	TR	SD	SD	SD	SD	SD	SD	SD	AAD	AAD	AAD
$\chi^2(9)$	1,0051	R	TR	TR	TR	TR	TR	TR	TR	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD
$\chi^2(5)$	1,0126	R	TR	TR	TR	TR	TR	TR	TR	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD
$\chi^2(4)$	1,0182	R	TR	TR	TR	TR	TR	TR	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD
G(1)	1,0624	R	TR	TR	TR	TR	TR	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD
G(0.75)	1,1055	R	TR	TR	TR	TR	TR	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD
$\chi^2(1)$	1,2183	R	TR	TR	TR	TR	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD
W(0.75)	1,3052	R	TR	TR	TR	TR	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD
LN(0.8)	1,3942	R	TR	TR	TR	TR	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD
LN(0.9)	1,5146	R	TR	TR	TR	TR	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD
LN(1)	1,6576	R	TR	TR	TR	TR	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD
LN(1.1)	1,8266	R	TR	TR	TR	TR	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD
LN(1.2)	2,0254	R	TR	TR	TR	TR	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD
W(0.5)	2,2598	R	TR	TR	TR	TR	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD
LN(1.4)	2,5322	R	TR	TR	TR	TR	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD
LN(1.5)	2,8521	R	TR	TR	TR	TR	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD
LN(1.6)	3,2262	R	TR	TR	TR	TR	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD
LN(1.7)	3,6635	R	TR	TR	TR	TR	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD
LN(2)	5,4707	R	TR	TR	TR	TR	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD
LN(2.2)	7,2432	R	TR	TR	TR	TR	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD	AAD

SD-Desvio Padrão TR-Amplitude Total R-Amplitude AAD-Desvio Absoluto da Média

### Robustez das Estatísticas em Distribuições Assimétricas

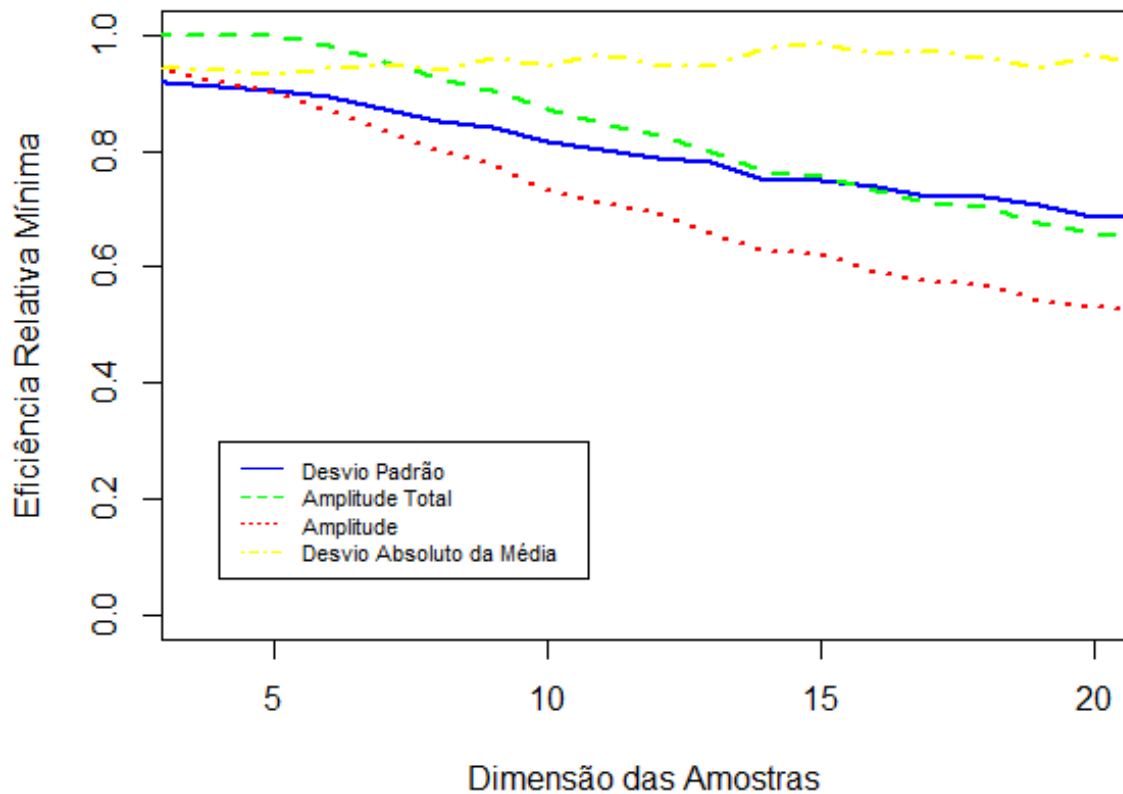


Figura 3.4: Grau da Robustez das Estatísticas de Escala para as Distribuições Assimétricas e Dimensões consideradas

Observando a tabela relativa às distribuições assimétricas [Tabela 3.4], o desvio padrão é o estimador mais eficiente para amostras de dimensão superior e distribuições de baixo peso de caudas. A amplitude apenas se mostra mais eficiente para amostras de dimensão  $n=3$ . Para amostras de dimensão relativamente pequena, superiores a 3, a amplitude total é a mais eficiente em grande parte dos casos. De resto, à medida que as dimensões das amostras aumentam e os pesos das caudas das distribuições também aumentam, o desvio absoluto da média torna-se o estimador mais eficiente. Os valores das médias das variâncias dos logaritmos podem ser consultados desde a [Tabela A.25] até à [Tabela A.28].

Relativamente à robustez nas distribuições assimétricas [Figura 3.4], pode-se observar que a amplitude total é o estimador mais robusto para amostras mais pequenas e o desvio absoluto da média para amostras de dimensão superior. A amplitude total tem tendência a diminuir a sua robustez à medida que a dimensão das amostras aumenta. A amplitude é considerada o estimador menos robusto para a maioria das dimensões. Os valores das eficiências relativas podem ser consultados desde a [Tabela A.29] até à [Tabela A.32].

Segundo os dados apresentados em Figueiredo, F e Gomes, M.I. [7], o desvio padrão é a estatística mais eficiente para dados provenientes da distribuição Normal e outras distribuições simétricas com peso de caudas semelhante. Para pequenas dimensões e para distribuições com caudas mais pesadas, a amplitude total é o estimador mais eficiente. Referindo a robustez, a amplitude total é a estatística mais robusta para amostras de pequena dimensão e para dimensões superiores o desvio padrão é o estimador mais robusto. A amplitude revela ser uma estatística de pouca robustez comparativamente com o desvio padrão e a amplitude total. Como já foi verificado, as conclusões dos autores coincidem com as apresentadas aqui. Com a exceção de que a amplitude total apresenta ser a estatística mais eficiente para mais dimensões do que nesta dissertação. Tal diferença poderá se dever à utilização do desvio absoluto da média que é a estatística mais eficiente para a maioria dos casos. Podendo este ser mais eficiente onde a amplitude total seria o estimador mais eficiente caso não considerássemos o desvio absoluto da média.

## 4 Cartas de Controlo

Em Gomes, M. I., Figueiredo, F. e M.I. Barão<sup>[9]</sup>, uma carta de controlo é considerada uma ferramenta gráfica utilizada para monitorizar uma variável, a partir da qual consegue-se perceber a variação do respetivo processo. São aplicadas em diferentes áreas, normalmente na indústria. Quando os parâmetros em estudo representam alguma característica de qualidade desconhecida, a aplicação de uma carta de controlo pode ser utilizada em duas fases.

Na primeira fase a carta é aplicada retrospectivamente em informação de referência, quando o processo estava sob controlo, assim é possível analisar informação estável proveniente do processo. Após ser escolhida a informação de referência, são calculadas as estimativas dos parâmetros ainda na fase 1 e na fase 2 são calculados os limites de controlo. Na fase 2, as amostras analisadas são prospectivamente monitorizadas a partir do processo sob controlo. Se os valores das estatísticas das amostras encontram-se dentro dos limites de controlo, o processo é considerado sob controlo. Caso se verifiquem valores das estatísticas fora dos limites de controlo, pode ser considerado um sinal de que o processo está fora de controlo. Utilizando uma carta de controlo num determinado processo, permite distinguir quando o processo encontra-se sob controlo ou fora de controlo. Com esta distinção consegue-se identificar um processo fora de controlo e interrompê-lo quando necessário.

A sua metodologia requer uma amostragem do processo em questão ao longo do tempo, por exemplo: recolher uma amostra por hora. A sua representação gráfica requer os valores das estatísticas associadas ao processo e os limites de controlo associados à mesma estatística. Existem diferentes tipos de cartas, desde as 3- $\sigma$ , Shewhart ou CUSUM. As cartas de controlo apresentam melhor desempenho em diferentes situações, tal como as cartas de Shewhart são consideradas melhores na deteção de grandes alterações nos parâmetros em estudo enquanto as CUSUM são melhores a captar pequenas alterações.

Segundo Figueiredo, F. e Gomes, M.I.<sup>[7]</sup>, na monitorização do valor médio e do desvio padrão nos processos industriais é normal a utilização das cartas de controlo de Shewhart com limites de controlo 3-sigma. Como referido anteriormente estas cartas assumem a independência e a normalidade da informação dos respetivos processos.

As cartas de controlo de Shewhart possuem bom desempenho na deteção de médias e grandes alterações nos parâmetros em estudo, isto quando estamos perante informação proveniente da distribuição Normal, quando a distribuição em estudo não é Normal, pode apresentar um coeficiente de assimetria demasiado elevado ou um grande peso das caudas e as cartas de controlo de Shewhart perdem parte das suas propriedades.

### 4.1 Cartas 3- $\sigma$

Neste estudo para as cartas 3 $\sigma$ , designaremos por  $T$  a estatística de controlo, o valor médio das estatísticas por  $E(T)$  e o desvio padrão das mesmas por  $\sqrt{V(T)}$ .

$$LCL_T = E(T) - 3\sqrt{V(T)}$$

$$UCL_T = E(T) + 3\sqrt{V(T)}$$

Sendo  $LCL_T$  o limite inferior e  $UCL_T$  o limite superior da carta 3  $\sigma$ .

No caso da monitorização do valor médio é utilizada a carta de controlo da média cujos



limites são:

$$LCL_M = \mu_0 - 3 \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$$

$$UCL_M = \mu_0 + 3 \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$$

Sendo  $\mu_0$  o valor médio e  $\sigma_0$  o desvio padrão. Recorre-se à média para se estimar o valor médio e ao desvio padrão amostral para se estimar o desvio padrão. No caso da monitorização do desvio padrão a carta de amplitude tem como limites:

$$LCL_R = d_2\sigma_0 - 3d_3\sigma_0$$

$$UCL_R = d_2\sigma_0 + 3d_3\sigma_0$$

$d_2$  é a estimativa do valor médio da amplitude, sendo  $E(R) = d_2\sigma$  para amostras provenientes da distribuição  $N(0,1)$  e  $d_3$  representa a estimativa do desvio padrão da amplitude em amostras provenientes da distribuição  $N(0,1)$ .

Um dos cuidados a ter quando se aplicam cartas de controlo, é a não utilização de cartas de controlo  $3-\sigma$  quando a distribuição da estatística em estudo possui um elevado grau de assimetria ou elevado peso das caudas. Neste caso é aconselhado a utilização dos quantis da distribuição da estatística em estudo para a fixação dos limites de controlo.

Quando se pretendem usar cartas mais robustas e se tem o objetivo de analisar alterações no valor médio  $\mu$  do processo é possível aplicar a carta de controlo da TMD ou então a carta de controlo da tri-média.

$$LCL_{TMD} = E(TMD) - 3\sqrt{V(TMD)}$$

$$UCL_{TMD} = E(TMD) + 3\sqrt{V(TMD)}$$

$$LCL_{TM} = E(TM) - 3\sqrt{V(TM)}$$

$$UCL_{TM} = E(TM) + 3\sqrt{V(TM)}$$

Na monitorização do desvio padrão, o que tem relevância aqui é a deteção dos aumentos e não das descidas para este estimador. Portanto teremos uma carta de controlo com apenas um limite superior. Neste caso podemos aplicar a carta de controlo R, apresentada atrás, ou as cartas de controlo da Amplitude Total e do Desvio Absoluto da Média.

$$UCL_{TR} = E(TR) + 3\sqrt{V(TR)}$$

$$UCL_{AAD} = E(AAD) + 3\sqrt{V(AAD)}$$

## 4.2 Desempenho das Cartas

Para medir a capacidade de uma carta de controlo de detetar alterações num determinado processo, é calculado o número esperado de amostras que ocorrem antes do primeiro sinal, esta medida é designada por ARL. Também é possível utilizar a função potência ou o SDRL. Se os valores sucessivos de uma estatística T são independentes e quando não é necessária a estimação dos limites de controlo a ARL é dada por:

$$ARL_T(\theta) = \frac{1}{1-P(T \in C|\theta)} = \frac{1}{\pi_T(\theta)}$$

Em que  $\theta$  representa o parâmetro a ser analisado e  $\pi_T(\theta)$  representa a função potência da carta de controlo T [ $\pi_T(\theta) = P(T \notin C|\theta = \theta_0)$ ]. O SDRL é dado por:  $SDRL_T(\theta) = \frac{\sqrt{1-\pi_T(\theta)}}{\pi_T(\theta)}$

De certo modo, quando estamos perante um processo sob controlo, o valor do falso alarme da carta de controlo em questão é o valor da função potência para quando não existe alteração no parâmetro.

$$\alpha = P(T \notin C|IN) = P(T \notin C|\theta = \theta_0) = \pi_T(\theta_0) = \frac{1}{ARL(\theta_0)}$$

Os limites de uma carta de controlo T são determinados com o objetivo de se obter uma fixada e baixa (em geral  $\alpha=0.002$ ) taxa de falso alarme e maximizar os valores das funções potência.

### 4.3 Análise das Taxas de Falso Alarme para as Cartas 3- $\sigma$

#### 4.3.1 Simulação

Para aplicarmos as cartas 3- $\sigma$  da mediana total e da tri-média, precisamos de estimativas dos desvios padrão destas estatísticas quando aplicadas em informação proveniente da distribuição Normal. Foi necessário recorrer a simulações de 500000 amostras provenientes de uma população Normal standard, para cada estatística e dimensão com o objetivo de se obter estimativas dos desvios padrão da mediana total e da tri-média para as diferentes dimensões.

Tabela 4.1: Estimativas do desvio padrão  $d_3$  para  $n \leq 20$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$d3_{TMd}$	-	0,7071	0,5823	0,5068	0,4634	0,4250	0,4007	0,3752	0,3584	0,3405
$d3_{TM}$	-	-	0,6153	0,5268	0,4834	0,4334	0,4069	0,3766	0,3623	0,3388
n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$d3_{TMd}$	0,3283	0,3140	0,3037	0,2933	0,2857	0,2770	0,2696	0,2629	0,2565	0,2500
$d3_{TM}$	0,3258	0,3097	0,3025	0,2876	0,2799	0,2688	0,2648	0,2543	0,2490	0,2410

Para o cálculo das taxas de falso alarme recorreu-se a uma simulação, onde foram geradas 500000 amostras para cada dimensão, distribuição e estimador considerados. Aplicou-se a standardização nas diferentes amostras geradas e a partir destas amostras standardizadas calcularam-se os valores das estatísticas. A standardização foi aplicada com base nos valores teóricos do valor médio e do desvio padrão de cada distribuição em causa. Denotando X como a amostra, Z a amostra standardizada,  $\mu$  o valor médio e  $\sigma$ , o desvio padrão:  $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$

Recorrendo-se ao número de amostras fora dos limites, calculou-se a proporção de amostras, das quais os valores das estatísticas estavam fora dos limites. Como os dados foram gerados a partir das distribuições consideradas, logo os processos sempre estiveram sob controlo e as proporções calculadas estimam as taxas de falso alarme, sendo utilizadas no cálculo das taxas de falso alarme para as diferentes distribuições e dimensões. Foram consideradas distribuições com diferentes pesos de caudas de modo a obter informação sobre o comportamento das cartas para os casos em questão. Sendo que para distribuições com caudas mais leves, recorreu-se à distribuição N(0,1), t(9), L(0,1), CN(0.3,2) e Laplace(0,1), sendo distribuições já utilizadas em diferentes estudos. Para representação de casos mais extremos a nível do peso das caudas temos as distribuições CN(0.3,4), CN(0.3,6) e CN(0.3,8). Utilizaram-se as cartas 3- $\sigma$  da tri-média e da mediana total com o objetivo de se obter uma taxa de falso alarme de 0.0027, ou seja a taxa de falso alarme de que a carta 3- $\sigma$  da média tem no caso da sua aplicação em informação proveniente de uma distribuição N(0,1).

### 4.3.2 Taxas de Falso Alarme das Cartas de Estimadores de Localização

Tabela 4.2: Taxas de falso alarme da Carta da Média

Modelo	$\tau$	3	4	5	6	7	12	16	20
N(0,1)	1,0000	0,0025	0,0028	0,0027	0,0027	0,0027	0,0029	0,0028	0,0028
t(9)	1,1641	0,005	0,0046	0,0042	0,0038	0,0037	0,0034	0,0032	0,0031
Log(0,1)	1,2127	0,0051	0,0045	0,0043	0,0039	0,0037	0,0033	0,0033	0,0030
C(0,3,2)	1,3190	0,0057	0,0051	0,0047	0,0044	0,0040	0,0037	0,0034	0,0032
Lp(0,1)	1,6364	0,0079	0,0067	0,0059	0,0056	0,0051	0,0042	0,0040	0,0038
C(0,3,4)	2,3311	0,0106	0,0084	0,0077	0,0070	0,0062	0,0050	0,0046	0,0041
C(0,3,6)	3,3438	0,0116	0,0101	0,0084	0,0078	0,0073	0,0056	0,0049	0,0046
C(0,3,8)	4,3359	0,0123	0,0104	0,0092	0,0083	0,0075	0,0057	0,0051	0,0045

Tabela 4.3: Taxas de falso alarme da Carta da Mediana Total

Modelo	$\tau$	3	4	5	6	7	12	16	20
N(0,1)	1,0000	0,0027	0,0027	0,0028	0,0027	0,0027	0,0028	0,0026	0,0028
t(9)	1,1641	0,0043	0,0036	0,0025	0,0024	0,0020	0,0016	0,0013	0,0013
Log(0,1)	1,2127	0,0043	0,0037	0,0028	0,0024	0,0019	0,0014	0,0012	0,0011
CN(0.3,2)	1,3190	0,0050	0,0037	0,0027	0,0023	0,0018	0,0011	0,0009	0,0007
Lp(0,1)	1,6364	0,0062	0,0047	0,0030	0,0023	0,0016	0,0008	0,0004	0,0003
CN(0.3,4)	2,3311	0,0083	0,0059	0,0034	0,0023	0,0015	0,0002	0,0001	0,0000
CN(0.3,6)	3,3438	0,0096	0,0066	0,0036	0,0024	0,0013	0,0002	0,0000	0,0000
CN(0.3,8)	4,3359	0,0102	0,0068	0,0034	0,0024	0,0014	0,0002	0,0000	0,0000

Tabela 4.4: Taxas de falso alarme da Carta da Tri-Média

Modelo	$\tau$	3	4	5	6	7	12	16	20
N(0,1)	1,0000	0,0028	0,0028	0,0027	0,0027	0,0027	0,0028	0,0027	0,0028
t(9)	1,1641	0,0037	0,0029	0,0023	0,0023	0,0019	0,0016	0,0014	0,0014
Log(0,1)	1,2127	0,0039	0,0031	0,0025	0,0022	0,0019	0,0015	0,0013	0,0013
CN(0.3,2)	1,3190	0,0046	0,0031	0,0023	0,0021	0,0017	0,0012	0,0011	0,0009
Lp(0,1)	1,6364	0,0052	0,0037	0,0025	0,0020	0,0016	0,0009	0,0006	0,0005
CN(0.3,4)	2,3311	0,0077	0,0045	0,0027	0,0019	0,0013	0,0004	0,0002	0,0001
CN(0.3,6)	3,3438	0,0091	0,0049	0,0029	0,002	0,0013	0,0003	0,0001	0,0000
CN(0.3,8)	4,3359	0,0096	0,0050	0,0028	0,0020	0,0014	0,0002	0,0001	0,0000

Para a carta de controlo da média  $3\text{-}\sigma$  verifica-se que a taxa de falso alarme aumenta com o peso das caudas. Para as cartas da mediana total e para a tri-média, quando estamos perante dimensões ( $n \geq 7$ ), as taxas de falso alarme vão diminuindo à medida que o peso das caudas aumenta. Quando as dimensões das amostras aumentam as taxas de falso alarme diminuem em quase todos os casos.

A carta de médias em grande parte dos casos tem as taxas de falso alarme mais elevadas. Sendo que para dimensões mais reduzidas das amostras, a tri-média apresenta as taxas mais baixas. Para maiores dimensões a mediana total tem as taxas mais baixas. Como o objetivo é obter taxas de falso alarmes próximas de 0.0027, verificamos que a carta da tri-média  $3\text{-}\sigma$  é a carta que obtém valores mais próximos para pequenas dimensões e para distribuições de caudas mais pesadas. No caso contrário, dimensões superiores e caudas mais leves, a carta  $3\text{-}\sigma$

da mediana total obtém os valores mais próximos para as taxas de falso alarme. Para  $n=6$  a carta de controlo da mediana total é aquela que obtém os valores mais próximos de 0.0027. Para dimensões superiores a 12 as cartas de controlo da mediana total e da tri-média possuem taxas de falso alarme demasiado baixas para distribuições de caudas mais pesadas.

### 4.3.3 Taxas de Falso Alarme das Cartas de Estimadores de Escala

A partir da mesma metodologia utilizada para calcular as estimativas do desvio padrão das estatísticas de localização, calculou-se as estimativas do valor médio e do desvio padrão para as estatísticas de dispersão, sendo apresentadas nas tabelas 4.5 e 4.6. Foi utilizada informação proveniente de uma  $N(0,1)$ . Para o cálculo das taxas de falso alarme das cartas  $3-\sigma$  das estatísticas de escala, recorreu-se ao mesmo método aplicado no cálculo das taxas de falso alarme das cartas  $3-\sigma$  das estatísticas de localização.

Tabela 4.5: Estimativas do valor médio ( $d_2$ ) e do desvio padrão ( $d_3$ ) para as estatísticas de dispersão ( $3 \leq n \leq 11$ )

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$d2_R$	1,6926	2,0570	2,3252	2,5334	2,7067	2,8463	2,9700	3,0782	3,1730
$d3_R$	0,8876	0,8791	0,8645	0,8480	0,8323	0,8194	0,8064	0,7971	0,7879
$d2_{TR}$	1,1276	1,5154	1,8011	2,0251	2,2073	2,3610	2,4933	2,6089	2,7108
$d3_{TR}$	0,5914	0,6420	0,6579	0,6590	0,6562	0,6479	0,6415	0,6353	0,6291
$d2_{AAD}$	0,6510	0,6918	0,7125	0,7285	0,7388	0,7467	0,7520	0,7569	0,7604
$d3_{AAD}$	0,3418	0,2963	0,2662	0,2432	0,2258	0,2115	0,1995	0,1894	0,1807

Tabela 4.6: Estimativas do valor médio ( $d_2$ ) e do desvio padrão ( $d_3$ ) para as estatísticas de dispersão ( $12 \leq n \leq 20$ )

n	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$d2_R$	3,2587	3,3366	3,4065	3,4737	3,5320	3,5885	3,6390	3,6895	3,7346
$d3_R$	0,7774	0,7696	0,7628	0,7579	0,7474	0,7425	0,7382	0,7333	0,7283
$d2_{TR}$	2,8039	2,8879	2,9635	3,0326	3,0995	3,1578	3,2153	3,2679	3,3152
$d3_{TR}$	0,6230	0,6168	0,6123	0,6054	0,6021	0,5981	0,5921	0,5885	0,5849
$d2_{AAD}$	0,7638	0,7663	0,7691	0,7712	0,7725	0,7743	0,7750	0,7763	0,7776
$d3_{AAD}$	0,1735	0,1661	0,1602	0,1550	0,1501	0,1454	0,1415	0,1378	0,1343

Tabela 4.7: Taxas de falso alarme da Carta de Amplitude

Modelo	$\tau$	3	4	5	6	7	12	16	20
$N(0,1)$	1,0000	0,0060	0,0050	0,0044	0,0045	0,0043	0,0048	0,0046	0,0045
$t(9)$	1,1641	0,0123	0,0134	0,0145	0,0159	0,0176	0,0250	0,0309	0,0364
$\text{Log}(0,1)$	1,2127	0,0130	0,0144	0,0154	0,0167	0,0185	0,0273	0,0327	0,0385
$\text{CN}(0.3,2)$	1,3190	0,0157	0,0174	0,0193	0,0214	0,0235	0,0350	0,0442	0,0522
$\text{Lp}(0,1)$	1,6364	0,0203	0,0235	0,0269	0,0306	0,0345	0,0533	0,0698	0,0835
$\text{CN}(0.3,4)$	2,3311	0,0285	0,0332	0,0392	0,0453	0,052	0,0877	0,1171	0,1422
$\text{CN}(0.3,6)$	3,3438	0,0312	0,0372	0,0439	0,0521	0,0600	0,1040	0,1386	0,1726
$\text{CN}(0.3,8)$	4,3359	0,0326	0,0390	0,0456	0,0551	0,0638	0,1104	0,1485	0,1839

Tabela 4.8: Taxas de falso alarme da Carta de Amplitude Total

Modelo	$\tau$	3	4	5	6	7	12	16	20
N(0,1)	1,0000	0,0060	0,0048	0,0040	0,0037	0,0034	0,0032	0,0032	0,0032
t(9)	1,1641	0,0124	0,0120	0,0120	0,0123	0,0129	0,0172	0,0216	0,0260
Log(0,1)	1,2127	0,0132	0,0127	0,0125	0,0130	0,0137	0,0188	0,0226	0,0277
CN(0.3,2)	1,3190	0,0206	0,0207	0,0212	0,0230	0,0246	0,0375	0,0490	0,0615
Lp(0,1)	1,6364	0,0163	0,0153	0,0153	0,0155	0,0163	0,0233	0,0300	0,0364
CN(0.3,4)	2,3311	0,0284	0,0287	0,0295	0,0318	0,0346	0,0567	0,0771	0,1012
CN(0.3,6)	3,3438	0,0313	0,032	0,0328	0,0360	0,0394	0,0652	0,0914	0,1211
CN(0.3,8)	4,3359	0,0327	0,0326	0,0339	0,0367	0,0402	0,0689	0,0953	0,1278

Tabela 4.9: Taxas de falso alarme da Carta de Desvio Absoluto da Média

Modelo	$\tau$	3	4	5	6	7	12	16	20
N(0,1)	1,0000	0,0058	0,0050	0,0047	0,0044	0,0039	0,0034	0,0031	0,0030
t(9)	1,1641	0,0127	0,0118	0,0102	0,0094	0,0082	0,0059	0,0050	0,0043
Log(0,1)	1,2127	0,0135	0,0117	0,0101	0,0093	0,0085	0,0058	0,0048	0,0040
CN(0.3,2)	1,319	0,0218	0,0196	0,018	0,0156	0,0141	0,0088	0,0067	0,0051
Lp(0,1)	1,6364	0,0169	0,0140	0,0120	0,0108	0,0095	0,0064	0,0051	0,0041
CN(0.3,4)	2,3311	0,0327	0,0289	0,0239	0,0208	0,0184	0,0108	0,0076	0,0054
CN(0.3,6)	3,3438	0,0375	0,0339	0,0286	0,0248	0,0216	0,0121	0,0079	0,0056
CN(0.3,8)	4,3359	0,0396	0,0353	0,0305	0,0256	0,0228	0,0131	0,0085	0,0056

Para as cartas de controlo  $3\text{-}\sigma$  dos estimadores de dispersão, não existe um valor da taxa de falso alarme pré-definido e como só estamos a considerar o limite superior, o valor da taxa de falso alarme para informação proveniente da Normal Standard não será 0.0027. Como não termos um valor, para o qual as taxas de falso alarme deverão se aproximar, esta poderá não ser a melhor alternativa em relação a outras abordagens. Por enquanto iremos considerar, não a aproximação de 0.0027 mas a minimização da taxa de falso alarme. Para as três cartas de controlo verifica-se que à medida que os pesos das caudas das distribuições aumentam, as taxas de falso alarme aumentam independentemente da dimensão considerada. Para dimensões superiores a carta do desvio absoluto da média obtém as taxas de falso alarme mais baixas, enquanto que para pequenas amostras e informação não normal apresenta as taxas mais altas ( $n=3$ ). Para amostras de dimensões ( $n=4,5$ ), a carta de controlo do desvio absoluto da média apresenta as taxas de falso alarme mais baixas para distribuições t(9), Log(0,1), CN(0.3,4) e Lp(0,1). Para  $n=4$  a carta de controlo da mediana total possui as taxas de falso alarme mais baixas para as distribuições mais pesadas ( $\tau \geq 2,3311$ ) e para a distribuição Normal. Para  $n=3$  as cartas da amplitude e da mediana total possuem taxas de falso alarme bastante próximas, a carta da amplitude tem as taxas mais baixas para informação proveniente das distribuições t(9), Log(0,1), CN(0.2,2) e Lp(0,1).

## 4.4 Análise dos Valores das Funções Potência para as Cartas 3- $\sigma$

### 4.4.1 Simulação

Para se obter os valores das funções potência, aplicou-se a mesma metodologia utilizada para as taxas de falsos alarme. Consideraram-se amostras de dimensão 5 e 10. Gerou-se 500000 amostras de valores aleatórios para cada diferença no parâmetro, distribuição e dimensão considerada. Após a standardização das amostras e o cálculo das estatísticas, é calculada a proporção de casos em que os valores das estatísticas se encontram fora dos limites de controlo. A partir desta proporção estimamos os valores das funções potência. Considerámos alterações no parâmetro  $\mu$  de -2, -1.5, -1, -0.5, 0.5, 1, 1.5, 2. Em relação a  $\sigma$ , considerou-se as alterações de 1.25, 1.5, 1.75, 2, 2.5, 3 e 3.5. As colunas, nas quais a alteração no parâmetro é 0 para  $\mu$  e 1 para  $\sigma$ , correspondem a quando não existe alteração no parâmetro, acabam por ser valores de taxas de falso alarme.

### 4.4.2 Funções Potência para as Cartas dos Estimadores de Localização

Tabela 4.10: Valores da Função Potência da Carta de Controlo da Média (n=10)

Modelo	$\tau$	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
N(0,1)	1,0000	0,9996	0,9595	0,5646	0,0781	0,0027	0,0773	0,5641	0,9593	0,9995
t(9)	1,1641	0,9993	0,9596	0,5664	0,0767	0,0034	0,0767	0,5650	0,9595	0,9993
Log(0,1)	1,2127	0,9994	0,9596	0,5648	0,0772	0,0034	0,0774	0,5639	0,9598	0,9994
CN(0.3,2)	1,3190	0,9993	0,9590	0,5653	0,0774	0,0036	0,0765	0,5652	0,9594	0,9993
Lp(0,1)	1,6364	0,9990	0,9583	0,5667	0,0755	0,0045	0,0759	0,5666	0,9593	0,9991
CN(0.3,4)	2,3311	0,9988	0,9588	0,5689	0,0754	0,0055	0,0754	0,5704	0,9586	0,9988
CN(0.3,6)	3,3438	0,9986	0,9585	0,5731	0,0751	0,0060	0,0749	0,5720	0,9579	0,9986
CN(0.3,8)	4,3359	0,9985	0,9576	0,5748	0,0748	0,0062	0,0756	0,5747	0,9583	0,9986

Tabela 4.11: Valores da Função Potência da Carta de Controlo da Mediana Total (n=10)

Modelo	$\tau$	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
N(0,1)	1,0000	0,9979	0,9202	0,4749	0,0630	0,0027	0,0626	0,4748	0,9201	0,9980
t(9)	1,1641	0,9987	0,9349	0,4718	0,0498	0,0017	0,0498	0,4723	0,9344	0,9987
Log(0,1)	1,2127	0,9988	0,9382	0,4720	0,0464	0,0015	0,0471	0,4706	0,9383	0,9989
CN(0.3,2)	1,3190	0,9991	0,9443	0,4707	0,0417	0,0013	0,0417	0,4702	0,9440	0,9991
Lp(0,1)	1,6364	0,9993	0,9624	0,4655	0,0274	0,0010	0,0275	0,4648	0,9626	0,9993
CN(0.3,4)	2,3311	0,9997	0,9831	0,4570	0,0117	0,0005	0,0117	0,4572	0,9827	0,9997
CN(0.3,6)	3,3438	0,9997	0,9914	0,4443	0,0062	0,0005	0,0061	0,4428	0,9914	0,9997
CN(0.3,8)	4,3359	0,9998	0,9934	0,4286	0,0049	0,0004	0,0047	0,4301	0,9935	0,9998

**Para amostras de dimensão 10:** À medida que o peso das caudas das distribuições aumenta, a probabilidade de detetar pequenas alterações no parâmetro baixa para as três cartas de controlo de localização. Para a carta de controlo 3- $\sigma$  da média, quando ocorrem alterações superiores de 0.5 ou -0.5, esta carta possui os valores da função potência mais altos. Com a aplicação desta carta, obtemos os valores mais baixos da função potência para informação proveniente de distribuições de caudas de pesadas. No entanto quando o peso das distribuições é mais baixo a carta de controlo 3- $\sigma$  da média tem a maior probabilidade de detetar as alterações no parâmetro, comparativamente com as restantes cartas.

Tabela 4.12: Valores da Função Potência da Carta de Controlo da Tri-Média ( $n=10$ )

Modelo	$\tau$	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
N(0,1)	1,0000	0,9981	0,9239	0,4810	0,0639	0,0027	0,0634	0,4807	0,9236	0,9981
t(9)	1,1641	0,9988	0,9377	0,4788	0,0510	0,0017	0,0511	0,4791	0,9371	0,9989
Log(0,1)	1,2127	0,9989	0,9405	0,4786	0,0478	0,0016	0,0484	0,4774	0,9405	0,9989
CN(0.3,2)	1,3190	0,9991	0,9460	0,4781	0,0433	0,0013	0,0438	0,4782	0,9458	0,9991
Lp(0,1)	1,6364	0,9993	0,9622	0,4745	0,0295	0,0010	0,0297	0,4740	0,9625	0,9994
CN(0.3,4)	2,3311	0,9997	0,9816	0,4675	0,0142	0,0005	0,0141	0,4669	0,9814	0,9997
CN(0.3,6)	3,3438	0,9997	0,9885	0,4576	0,0089	0,0006	0,0088	0,4561	0,9886	0,9997
CN(0.3,8)	4,3359	0,9997	0,9908	0,4451	0,0072	0,0004	0,0070	0,4466	0,9909	0,9998

As cartas de controlo da mediana total e da tri-média apresentam comportamentos semelhantes em relação aos valores da função potência. Apesar de em alguns casos a tri-média apresentar valores ligeiramente superiores e a mediana total em diferentes casos. Por exemplo, para as distribuições mais pesadas a carta da tri-média tem tendência a obter valores mais altos em relação às restantes cartas, independentemente da alteração no parâmetro.

A carta da média  $3\text{-}\sigma$  apresenta valores da função potência superiores para pequenas alterações no parâmetro  $(-1,-0.5,0.5,1)$ , no entanto apresenta valores inferiores para grandes alterações  $(-2,-1.5,1.5,2)$ . As cartas da mediana total e da tri-média mostraram-se como sendo melhores para captar grandes alterações no parâmetro para distribuições com caudas relativamente mais pesadas ( $\tau \geq 1,3190$ ).

**Para amostras de dimensão 5:** Os valores das funções potência são no geral mais baixos para todas as cartas do que quando utilizou-se uma dimensão de 10. A carta de controlo da tri-média apresenta os valores da função potência mais altos para a distribuição mais pesada e para maiores alterações no parâmetro. Não mostra potência superior para mais nenhum caso.

Para pequenas alterações no parâmetro  $(-1,-0.5,0.5,1)$ , a carta  $3\text{-}\sigma$  da média possui os valores da função potência mais elevados independentemente da distribuição considerada. A carta  $3\text{-}\sigma$  da média, mostra sendo mais potente em distribuições com caudas mais leves  $[N(0,1),t(9),\text{Log}(0,1)]$ , comportamento já esperado e encontrado nos dados referentes a amostras de dimensão 10. Para as distribuições CN(0.3,2) e Lp(0,1), é a carta mais potente para todas as diferenças no parâmetro exceto para diferenças de  $(-2,2)$ . A carta de controlo da mediana total apresenta os valores superiores em distribuições relativamente mais pesadas  $[\text{CN}(0.3,2),\text{Lp}(0,1)]$  para grandes diferenças no parâmetro  $(-2,2)$ . Para as distribuições CN(0.3,6) e CN(0.3,8) apenas é mais potente para diferenças de  $(-1.5,1.5)$ .



Tabela 4.14: Valores da Função Potência da Carta de Controlo da Mediana Total (n=5)

Modelo	$\tau$	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
N(0,1)	1,0000	0,9049	0,5936	0,2001	0,0277	0,0028	0,0276	0,2003	0,5944	0,9054
t(9)	1,1641	0,9177	0,5983	0,1846	0,0232	0,0028	0,0231	0,1852	0,5991	0,9168
Log(0,1)	1,2127	0,9199	0,6020	0,1812	0,0226	0,0027	0,0222	0,1810	0,6017	0,9197
C(0,3,2)	1,3190	0,9243	0,6048	0,1744	0,0205	0,0028	0,0204	0,1745	0,6047	0,9253
Lp(0,1)	1,6364	0,9391	0,6215	0,1493	0,0180	0,0029	0,0177	0,1491	0,6207	0,9385
C(0,3,4)	2,3311	0,9575	0,6412	0,1144	0,0132	0,0031	0,0135	0,1136	0,6409	0,9571
C(0,3,6)	3,3438	0,9653	0,6737	0,0863	0,0117	0,0035	0,0121	0,0859	0,6728	0,9653
C(0,3,8)	4,3359	0,9673	0,6988	0,0743	0,0114	0,0036	0,0115	0,0738	0,6988	0,9672

Tabela 4.15: Valores da Função Potência da Carta de Controlo da Tri-Média (n=5)

Modelo	$\tau$	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
N(0,1)	1,0000	0,8718	0,5409	0,1759	0,0249	0,0028	0,0250	0,1763	0,542	0,8717
t(9)	1,1641	0,8894	0,5431	0,1559	0,0196	0,0025	0,0193	0,1575	0,5446	0,8885
Log(0,1)	1,2127	0,8937	0,5458	0,1524	0,0187	0,0025	0,0184	0,1521	0,5455	0,8929
C(0,3,2)	1,3190	0,8999	0,5471	0,1446	0,0163	0,0024	0,0163	0,1447	0,5480	0,9008
Lp(0,1)	1,6364	0,9242	0,5593	0,1145	0,0136	0,0024	0,0134	0,1139	0,5589	0,9232
C(0,3,4)	2,3311	0,9535	0,5698	0,0756	0,0084	0,0025	0,0086	0,0753	0,5700	0,9533
C(0,3,6)	3,3438	0,9676	0,5938	0,0500	0,0071	0,0028	0,0072	0,0504	0,5934	0,9673
C(0,3,8)	4,3359	0,9712	0,6178	0,0423	0,0068	0,0030	0,0068	0,0425	0,6180	0,9714

Tabela 4.13: Valores da Função Potência da Carta de Controlo da Média (n=5)

Modelo	$\tau$	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
N(0,1)	1,0000	0,9290	0,6390	0,2227	0,0300	0,0027	0,0298	0,2221	0,6391	0,9292
t(9)	1,1641	0,9311	0,6403	0,2174	0,0308	0,0043	0,0307	0,2180	0,6403	0,9306
Log(0,1)	1,2127	0,9312	0,6433	0,2170	0,0306	0,0041	0,0307	0,2168	0,6426	0,9310
C(0,3,2)	1,3190	0,9309	0,6442	0,2144	0,0312	0,0046	0,0313	0,2144	0,6442	0,9312
Lp(0,1)	1,6364	0,9334	0,6492	0,2087	0,0325	0,0061	0,0318	0,2083	0,6486	0,9326
C(0,3,4)	2,3311	0,9322	0,6621	0,1974	0,0345	0,0076	0,0346	0,1968	0,6613	0,9317
C(0,3,6)	3,3438	0,9315	0,6777	0,1911	0,0355	0,0086	0,0352	0,1916	0,6769	0,9315
C(0,3,8)	4,3359	0,9307	0,6869	0,1892	0,0354	0,0089	0,0358	0,1907	0,6887	0,9318

#### 4.4.3 Funções Potência para as Cartas dos Estimadores de Escala

Tabela 4.16: Valores da Função Potência para a Carta de Amplitude (n=10)

Modelo	$\tau$	1	1,25	1,5	1,75	2	2,5	3	3,5
N(0,1)	1,0000	0,0044	0,0613	0,2279	0,4490	0,6452	0,8724	0,9563	0,9841
t(9)	1,1641	0,0216	0,1008	0,2520	0,4409	0,6112	0,8386	0,9364	0,9750
Log(0,1)	1,2127	0,0237	0,1080	0,2627	0,4454	0,6102	0,8327	0,9323	0,9726
CN(0.3,2)	1,3190	0,0305	0,1273	0,2783	0,4434	0,5952	0,8121	0,9200	0,9664
Lp(0,1)	1,6364	0,0463	0,1487	0,2956	0,4502	0,5895	0,7866	0,8931	0,9457
CN(0.3,4)	2,3311	0,0727	0,1957	0,3343	0,4611	0,5663	0,7140	0,8074	0,8721
CN(0.3,6)	3,3438	0,0867	0,2114	0,3448	0,4633	0,5602	0,6965	0,7802	0,8330
CN(0.3,8)	4,3359	0,0918	0,2170	0,3479	0,4625	0,5555	0,6880	0,7690	0,8210

Tabela 4.17: Valores da Função Potência para a Carta de Amplitude Total (n=10)

Modelo	$\tau$	1	1,25	1,5	1,75	2	2,5	3	3,5
N(0,1)	1,0000	0,0031	0,0645	0,2562	0,4987	0,6977	0,9020	0,9690	0,9897
t(9)	1,1641	0,0156	0,0148	0,1080	0,2987	0,5117	0,8073	0,9298	0,9741
Log(0,1)	1,2127	0,0163	0,0992	0,2682	0,4691	0,6452	0,8606	0,9479	0,9801
CN(0.3,2)	1,3190	0,0207	0,1125	0,2743	0,4575	0,6228	0,8413	0,9378	0,9752
Lp(0,1)	1,6364	0,0323	0,1275	0,2790	0,4460	0,5947	0,8000	0,9044	0,9541
CN(0.3,4)	2,3311	0,047	0,1540	0,2934	0,4275	0,5416	0,7067	0,8104	0,8803
CN(0.3,6)	3,3438	0,054	0,1616	0,2922	0,4153	0,5199	0,6704	0,7646	0,8259
CN(0.3,8)	4,3359	0,056	0,1636	0,2894	0,4073	0,5083	0,6541	0,7458	0,8061

Tabela 4.18: Valores da Função Potência para a Carta de Desvio Absoluto da Média (n=10)

Modelo	$\tau$	1	1,25	1,5	1,75	2	2,5	3	3,5
N(0,1)	1,0000	0,0038	0,0637	0,2438	0,4771	0,6747	0,8894	0,9636	0,9872
t(9)	1,1641	0,0068	0,0652	0,2191	0,4251	0,6141	0,8500	0,9447	0,9790
Log(0,1)	1,2127	0,0068	0,0648	0,2165	0,4176	0,6046	0,8404	0,9400	0,9765
CN(0.3,2)	1,3190	0,0077	0,0664	0,2098	0,3985	0,5773	0,8193	0,928	0,9712
Lp(0,1)	1,6364	0,0104	0,0672	0,1893	0,3503	0,5098	0,7480	0,8778	0,9410
CN(0.3,4)	2,3311	0,0134	0,0691	0,1722	0,2991	0,4241	0,6307	0,7696	0,8592
CN(0.3,6)	3,3438	0,0155	0,0708	0,1646	0,2741	0,3816	0,5617	0,6883	0,7752
CN(0.3,8)	4,3359	0,016	0,0709	0,1608	0,2647	0,3650	0,5329	0,6520	0,7346

Em relação às estatísticas de escala, para amostras de dimensão 10, verifica-se que a carta de amplitude tem os valores mais elevados da função potência, independentemente da alteração no parâmetro, para as duas distribuições mais pesadas. Para a distribuição t-student a carta de controlo do desvio absoluto da média possui os valores mais elevados. A carta da amplitude total verifica-se como sendo a mais potente para dados provenientes da distribuição N(0,1). Para as restantes distribuições a carta de amplitude total apresenta os valores mais elevados para a maioria dos casos.

Tabela 4.19: Valores da Função Potência para a Carta de Amplitude (n=5)

Modelo	$\tau$	1	1,25	1,5	1,75	2	2,5	3	3,5
N(0,1)	1,0000	0,0048	0,0429	0,1389	0,2716	0,4100	0,6339	0,7752	0,8590
t(9)	1,1641	0,0146	0,0603	0,1464	0,2610	0,3818	0,5901	0,7348	0,8269
Log(0,1)	1,2127	0,0152	0,0633	0,1510	0,2631	0,3807	0,5849	0,7277	0,8202
CN(0.3,2)	1,3190	0,0188	0,0727	0,1584	0,2614	0,3692	0,5636	0,7072	0,8036
Lp(0,1)	1,6364	0,0272	0,0823	0,1646	0,2600	0,3574	0,5312	0,6634	0,7566
CN(0.3,4)	2,3311	0,0388	0,1039	0,1853	0,2669	0,3418	0,4650	0,5605	0,6412
CN(0.3,6)	3,3438	0,0438	0,1094	0,1883	0,2666	0,3369	0,4491	0,5307	0,5908
CN(0.3,8)	4,3359	0,0466	0,1123	0,1897	0,2658	0,3343	0,4442	0,5232	0,5809

Tabela 4.20: Valores da Função Potência para a Carta de Amplitude Total(n=5)

Modelo	$\tau$	1	1,25	1,5	1,75	2	2,5	3	3,5
N(0,1)	1,0000	0,004	0,0430	0,1427	0,2807	0,4223	0,6466	0,7850	0,8657
t(9)	1,1641	0,0116	0,0560	0,1447	0,2631	0,3874	0,6014	0,7458	0,8359
Log(0,1)	1,2127	0,0125	0,0587	0,1485	0,2638	0,3846	0,593	0,7376	0,8285
CN(0.3,2)	1,3190	0,0151	0,0647	0,1510	0,2574	0,3697	0,5708	0,7151	0,8101
Lp(0,1)	1,6364	0,0211	0,0725	0,1529	0,2502	0,3506	0,5294	0,6646	0,7604
CN(0.3,4)	2,3311	0,0293	0,0882	0,1667	0,2499	0,3273	0,4566	0,5587	0,6442
CN(0.3,6)	3,3438	0,0328	0,0910	0,1665	0,2438	0,3151	0,4324	0,5185	0,5830
CN(0.3,8)	4,3359	0,0337	0,0915	0,1641	0,2385	0,3077	0,4214	0,5046	0,5656

Tabela 4.21: Valores da Função Potência para a Carta de Desvio Absoluto da Média(n=5)

Modelo	$\tau$	1	1,25	1,5	1,75	2	2,5	3	3,5
N(0,1)	1,0000	0,005	0,0431	0,1384	0,2708	0,4068	0,6308	0,7722	0,8570
t(9)	1,1641	0,0099	0,0511	0,1357	0,2497	0,3723	0,5851	0,7324	0,8255
Log(0,1)	1,2127	0,0107	0,0526	0,1381	0,2500	0,3698	0,5781	0,7246	0,8181
CN(0.3,2)	1,3190	0,012	0,0577	0,1405	0,2460	0,3577	0,5579	0,7046	0,8025
Lp(0,1)	1,6364	0,0176	0,0635	0,1397	0,2340	0,3325	0,5122	0,6505	0,7483
CN(0.3,4)	2,3311	0,0246	0,0795	0,1545	0,2346	0,3094	0,4390	0,5438	0,6320
CN(0.3,6)	3,3438	0,0288	0,0870	0,1625	0,2389	0,3082	0,4231	0,5078	0,5726
CN(0.3,8)	4,3359	0,0302	0,0905	0,1658	0,2406	0,3086	0,4176	0,4978	0,5564

Para as amostras de dimensão 5, a carta de amplitude também possui os valores mais elevados da função potência para as duas distribuições mais pesadas e para diferenças moderadas ou grandes. Para distribuições com caudas mais leves e para maiores diferenças no parâmetro, a carta de amplitude total apresenta os valores mais elevados. À medida que a diferença nos parâmetros é menor e as distribuições têm caudas mais leves a carta da amplitude tem tendência a obter os maiores valores para estes casos. A carta do desvio absoluto da média não mostra ser superior a nível da potência para nenhum dos casos apresentados.

## 4.5 Cartas de Controlo com Limites Definidos por Quantis

Em Figueiredo, F. e Gomes, M.I. [5],[7] são utilizadas cartas de controlo com limites definidos pelos quantis de uma estatística para uma determinada distribuição. É possível construir uma carta de controlo baseada nos quantis da estatística  $T_n$  com risco  $\alpha$ . Sendo este, estimador do parâmetro  $\mu_0$ , os limites de controlo serão  $LCL = \chi_{\alpha/2}^{T_n}$  e  $UCL = \chi_{1-\alpha/2}^{T_n}$ . Quando queremos estimar  $\sigma_0$  usaremos o limite e  $UCL = \chi_{1-\alpha}^{T_n}$ . Estes quantis deverão ser provenientes de uma estatística obtida a partir de um processo que se encontra sob controlo. O processo tem como modelo  $F$   $P(T_n \leq \chi_p^{T_n} | F) = p$ .

A qualidade destes limites será analisada a partir da função potência da carta  $T_n$ . Serão calculados os quantis para os estimadores do parâmetro  $\mu_0$ , sendo que iremos considerar  $\alpha=0.002$  e os quantis  $\chi_{0.001}$  e  $\chi_{0.999}$ . Para os estimadores de  $\sigma_0$  como apenas considerámos o limite superior que é neste caso  $\chi_{0.998}$ .

### 4.5.1 Simulação

São geradas 500000 amostras provenientes de cada distribuição apresentada, dimensão considerada e para cada estatística de modo a serem calculados os quantis necessários. Os quantis são obtidos a partir dos valores standardizados das amostras, dos quais são calculados os valores das estatísticas. Tal como aplicado para as cartas  $3-\sigma$ , são consideradas as mesmas diferenças nos parâmetros. Após definidos os limites, é recorrido ao número de amostras cujo valor da estatística se encontre fora dos limites. Calcula-se a proporção dos valores das estatísticas que se encontrem fora dos limites definidos por quantis das cartas de controlo e assim obtém-se os valores das funções potência.

### 4.5.2 Quantis dos Estimadores

Para as estatísticas de localização verifica-se que os valores simulados dos quantis são maiores à medida que o peso das caudas da distribuição em causa é maior, isto para amostras de dimensão 5. Quando estamos perante amostras de dimensão 10, para a média, os valores simulados dos quantis aumentam quando o peso das caudas da distribuição em análise aumenta. Para a mediana total e a tri-média, os seus valores diminuem para distribuições mais pesadas. Em ambas as dimensões, observou-se que os valores dos quantis da média são superiores aos das restantes estatísticas para distribuições mais pesadas [CN(0.3,2), Lp(0,1), CN(0.3,4), CN(0.3,6) e CN(0.3,8)]. Para distribuições mais leves [N(0,1), t(9)], os seus valores já são inferiores. Para distribuições mais pesadas, a mediana total é a estatística com valores mais baixos nos quantis. Em relação às estatísticas de dispersão, os valores dos quantis são mais elevados em distribuições mais pesadas e quando se utiliza amostras de dimensão 5. A amplitude é a estatística que possui os valores mais elevados, seguida pela amplitude total. O desvio absoluto da média possui valores muito mais baixos do que as restantes estatísticas, para todos os casos apresentados.

Tabela 4.22: Valores Simulados dos Limites para as cartas dos estimadores de Localização para  $n=5$ 

	M		TMD		TM	
Modelo	LCL	UCL	LCL	UCL	LCL	UCL
N(0,1)	-1,3831	1,3816	-1,4425	1,4388	-1,4977	1,5010
t(9)	-1,4722	1,4655	-1,4328	1,4384	-1,4792	1,4780
Log(0,1)	-1,4578	1,4700	-1,4351	1,4346	-1,4811	1,4848
CN(0.3,2)	-1,5550	1,5615	-1,4616	1,4652	-1,4877	1,5037
Lp(0,1)	-1,4813	1,4837	-1,4613	1,4484	-1,4741	1,4832
CN(0.3,4)	-1,6108	1,6217	-1,5072	1,5072	-1,5391	1,5193
CN(0.3,6)	-1,6534	1,6642	-1,5343	1,5419	-1,5557	1,5681
CN(0.3,8)	-1,6655	1,6688	-1,5462	1,5469	-1,5917	1,5744

Tabela 4.23: Valores Simulados dos Limites para as cartas dos estimadores de Localização para  $n=10$ 

	M		TMD		TM	
Modelo	LCL	UCL	LCL	UCL	LCL	UCL
N(0,1)	-0,9808	0,9829	-1,0514	1,0506	-1,0462	1,0396
t(9)	-0,9959	0,9932	-0,9996	0,9979	-0,9956	1,0005
Log(0,1)	-0,9894	0,998	-0,991	0,9949	-0,988	0,9928
CN(0.3,2)	-0,9977	1	-0,9714	0,9783	-0,9737	0,9771
Lp(0,1)	-1,014	1,0192	-0,9354	0,9346	-0,936	0,9409
CN(0.3,4)	-1,0842	1,0744	-0,8259	0,8255	-0,8582	0,8469
CN(0.3,6)	-1,0878	1,1021	-0,7781	0,7737	-0,8078	0,8011
CN(0.3,8)	-1,0984	1,1034	-0,7623	0,747	-0,7897	0,7902

Tabela 4.24: Valores Simulados dos Limites Superiores  $\chi_{0.998}$  para as cartas de dispersão

	R		TR		AAD	
Modelo	n=5	n=10	n=5	n=10	n=5	n=10
N(0,1)	5,2381	5,7369	3,9716	4,6305	1,6172	1,3698
t(9)	6,2649	7,1685	4,6363	5,523	1,8033	1,4567
Log(0,1)	6,2359	7,0707	4,5751	5,419	1,7871	1,4529
CN(0.3,2)	6,3154	7,1445	4,6465	5,5154	1,8135	1,4615
Lp(0,1)	7,042	8,1255	5,1321	6,1066	1,9958	1,535
CN(0.3,4)	7,3415	8,343	5,3227	6,2836	2,0377	1,5742
CN(0.3,6)	7,6279	8,6734	5,509	6,4942	2,0838	1,6145
CN(0.3,8)	7,6999	8,7582	5,5333	6,5571	2,1035	1,6325

#### 4.5.3 Funções Potência das Cartas de Estimadores de Localização

**Para amostras de dimensão 5:** A carta de controlo da tri-média [Tabela 4.27] apresenta valores mais altos da função potência, logo apresenta melhores resultados para distribuições mais pesadas e para a maior alteração no parâmetro  $\mu$ . É mais fraca para alterações mais pequenas e distribuições com peso de caudas mais baixo. A carta da mediana total [Tabela 4.26] mostra-se como sendo a carta com os valores mais altos da função potência para distribuições mais leves, exceto a N(0,1), independente da alteração no parâmetro. Para diferenças no parâmetro até

-1.5 e 1.5, também acaba por obter os valores mais altos. A carta da média [Tabela 4.25] tem os valores das funções potência mais altos para a distribuição normal. Para distribuições mais pesadas e pequenas diferenças no parâmetro, -0.5 e 0.5, a carta q da média também tem os valores mais altos. Para grandes diferenças no parâmetro e em distribuições mais pesadas acaba por ser a carta com os valores mais baixos.

Tabela 4.25: Valores da Função Potência da Carta de Controlo da Média com quantis (n=5)

Modelo	$\tau$	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
N(0,1)	1,0000	0,9167	0,6034	0,1965	0,0245	0,0020	0,0242	0,197	0,6053	0,9166
t(9)	1,1641	0,8874	0,5316	0,1452	0,0165	0,0020	0,0167	0,1447	0,5309	0,8869
Log(0,1)	1,2127	0,8854	0,5276	0,1428	0,0162	0,0019	0,0164	0,1424	0,5272	0,8850
C(0,3,2)	1,3190	0,8808	0,5157	0,1346	0,0160	0,0020	0,0158	0,1342	0,5146	0,8803
Lp(0,1)	1,6364	0,8473	0,4401	0,0976	0,0118	0,0020	0,0116	0,0980	0,4416	0,8484
C(0,3,4)	2,3311	0,8244	0,3725	0,0780	0,0103	0,0020	0,0105	0,0774	0,3727	0,8242
C(0,3,6)	3,3438	0,8054	0,3179	0,0679	0,0096	0,0020	0,0095	0,0674	0,3171	0,8049
C(0,3,8)	4,3359	0,8041	0,3036	0,0667	0,0095	0,0020	0,0096	0,0663	0,3035	0,8038

Tabela 4.26: Valores da Função Potência da Carta de Controlo da Mediana Total com quantis (n=5)

Modelo	$\tau$	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
N(0,1)	1,0000	0,8865	0,5516	0,1716	0,0213	0,0020	0,0212	0,1702	0,5498	0,8854
t(9)	1,1641	0,8998	0,5571	0,1578	0,0177	0,0020	0,0184	0,1608	0,5614	0,9021
Log(0,1)	1,2127	0,9044	0,5610	0,1556	0,0175	0,0020	0,0178	0,1557	0,5607	0,9046
C(0,3,2)	1,3190	0,9039	0,5491	0,1425	0,0152	0,0020	0,0145	0,1362	0,5373	0,8996
Lp(0,1)	1,6364	0,9150	0,5386	0,1119	0,0122	0,0020	0,0126	0,1141	0,5435	0,9170
C(0,3,4)	2,3311	0,9285	0,4911	0,0675	0,0081	0,0020	0,0081	0,0670	0,4899	0,9281
C(0,3,6)	3,3438	0,9362	0,4321	0,0455	0,0067	0,0020	0,0069	0,0467	0,4430	0,9378
C(0,3,8)	4,3359	0,9418	0,4094	0,0410	0,0065	0,0020	0,0064	0,0412	0,4116	0,9422

Tabela 4.27: Valores da Função Potência da Carta de Controlo da Tri-Média com quantis (n=5)

Modelo	$\tau$	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
N(0,1)	1,0000	0,8490	0,4983	0,1498	0,0194	0,0020	0,0196	0,1517	0,5028	0,8507
t(9)	1,1641	0,8778	0,5198	0,1433	0,0168	0,0020	0,0169	0,1424	0,5187	0,8769
Log(0,1)	1,2127	0,8787	0,5143	0,1353	0,0157	0,0020	0,0159	0,1370	0,5171	0,8800
C(0,3,2)	1,3190	0,8869	0,5155	0,1288	0,0140	0,0020	0,0142	0,1329	0,5247	0,8905
Lp(0,1)	1,6364	0,9046	0,4956	0,0927	0,0104	0,002	0,0112	0,0987	0,5146	0,9105
C(0,3,4)	2,3311	0,9349	0,4729	0,0537	0,0064	0,0020	0,0059	0,0492	0,4455	0,9289
C(0,3,6)	3,3438	0,9456	0,3734	0,0304	0,0049	0,0020	0,0050	0,0320	0,3952	0,9487
C(0,3,8)	4,3359	0,9527	0,3293	0,0260	0,0048	0,0020	0,0046	0,0240	0,2944	0,9492

**Para amostras de dimensão 10:** Todas as cartas apresentam valores superiores aos apresentados com amostras de dimensão 5. A carta da média [Tabela 4.28] apresenta os valores mais altos para a distribuição Normal, independente do tamanho da alteração no parâmetro. A carta da mediana total [Tabela 4.29] apresenta os valores superiores para a maioria das distribuições e alterações no parâmetro. A carta da tri-média [Tabela 4.30] apresenta os melhores valores para pequenas alterações no parâmetro.

Tabela 4.28: Valores da Função Potência da Carta de Controlo da Média com quantis (n=10)

Modelo	$\tau$	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
N(0,1)	1,0000	0,9993	0,9499	0,5246	0,0647	0,0020	0,0656	0,5291	0,9508	0,9994
t(9)	1,1641	0,9988	0,9379	0,4819	0,0517	0,0020	0,0541	0,4897	0,9406	0,9988
Log(0,1)	1,2127	0,9987	0,9393	0,4840	0,0523	0,0020	0,0510	0,4808	0,9377	0,9987
C(0,3,2)	1,3190	0,9980	0,9283	0,4456	0,0434	0,0020	0,0435	0,4460	0,9281	0,9981
Lp(0,1)	1,6364	0,9986	0,9377	0,4798	0,0513	0,0020	0,0504	0,4763	0,9368	0,9986
C(0,3,4)	2,3311	0,9966	0,9122	0,3930	0,0350	0,0020	0,0357	0,3955	0,9132	0,9968
C(0,3,6)	3,3438	0,9960	0,9070	0,3714	0,0324	0,0020	0,0327	0,3726	0,9075	0,9961
C(0,3,8)	4,3359	0,9955	0,9022	0,3577	0,0315	0,0020	0,0336	0,3739	0,9079	0,9959

Tabela 4.29: Valores da Função Potência da Carta de Controlo da Mediana Total com quantis (n=10)

Modelo	$\tau$	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
N(0,1)	1,0000	0,9971	0,9025	0,4312	0,0503	0,0020	0,0522	0,4392	0,9056	0,9971
t(9)	1,1641	0,9989	0,941	0,4916	0,0548	0,0020	0,0565	0,4993	0,9427	0,9989
Log(0,1)	1,2127	0,9990	0,9483	0,5084	0,0564	0,0020	0,0530	0,4970	0,9450	0,9990
C(0,3,2)	1,3190	0,9994	0,9597	0,5374	0,0579	0,0020	0,0562	0,5294	0,9584	0,9994
Lp(0,1)	1,6364	0,9997	0,9807	0,6135	0,0527	0,0020	0,0534	0,6165	0,9811	0,9997
C(0,3,4)	2,3311	0,9999	0,9963	0,7862	0,0573	0,0020	0,0633	0,8003	0,9967	0,9999
C(0,3,6)	3,3438	1,0000	0,9987	0,9234	0,0570	0,0020	0,0535	0,9184	0,9987	1,0000
C(0,3,8)	4,3359	1,0000	0,9988	0,9438	0,0352	0,0020	0,0421	0,9534	0,9989	0,9999

Tabela 4.30: Valores da Função Potência da Carta de Controlo da Tri-média com quantis (n=10)

Modelo	$\tau$	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
N(0,1)	1,0000	0,9975	0,9098	0,4453	0,0533	0,0020	0,0513	0,4380	0,9067	0,9975
t(9)	1,1641	0,9990	0,9411	0,4926	0,0545	0,0020	0,0586	0,5064	0,9452	0,9990
Log(0,1)	1,2127	0,9989	0,9464	0,5015	0,0539	0,0020	0,0513	0,4893	0,9436	0,9989
C(0,3,2)	1,3190	0,9995	0,9608	0,5415	0,0586	0,0020	0,0598	0,5434	0,9619	0,9994
Lp(0,1)	1,6364	0,9997	0,9798	0,6077	0,0534	0,0020	0,0525	0,6038	0,9795	0,9997
C(0,3,4)	2,3311	0,9999	0,9951	0,7644	0,0533	0,0020	0,0500	0,7498	0,9946	0,9999
C(0,3,6)	3,3438	0,9999	0,9980	0,8995	0,0519	0,0020	0,0457	0,8844	0,9979	0,9999
C(0,3,8)	4,3359	1,0000	0,9986	0,9374	0,0470	0,0020	0,0438	0,9328	0,9985	0,9999

#### 4.5.4 Funções Potência das Cartas de Estimadores de Escala

Tabela 4.31: Valores da Função Potência para a Carta da Amplitude com quantis (n=10)

Modelo	$\tau$	1	1,25	1,5	1,75	2	2,5	3	3,5
N(0,1)	1,0000	0.0020	0,0396	0,1730	0,3774	0,5802	0,8386	0,9420	0,9788
t(9)	1,1641	0.0020	0,0145	0,0559	0,1409	0,2649	0,5444	0,7574	0,8793
Log(0,1)	1,2127	0.0020	0,0174	0,0676	0,1635	0,2938	0,5677	0,7693	0,8840
CN(0.3,2)	1,3190	0.0020	0,0214	0,0795	0,1785	0,3002	0,5483	0,7408	0,8624
Lp(0,1)	1,6364	0.0020	0,0146	0,0508	0,1159	0,2060	0,4154	0,6040	0,7440
CN(0.3,4)	2,3311	0.0020	0,0194	0,0666	0,1406	0,2294	0,4085	0,5541	0,6620
CN(0.3,6)	3,3438	0.0020	0,0193	0,0656	0,1362	0,2189	0,3856	0,5230	0,6272
CN(0.3,8)	4,3359	0.0020	0,0194	0,0644	0,1340	0,2154	0,3762	0,5099	0,6112

Tabela 4.32: Valores da Função Potência para a Carta da Amplitude Total com quantis (n=10)

Modelo	$\tau$	1	1,25	1,5	1,75	2	2,5	3	3,5
N(0,1)	1,0000	0.0020	0,0500	0,2203	0,4571	0,6614	0,8872	0,9631	0,9874
t(9)	1,1641	0.0020	0,0183	0,0793	0,2023	0,3661	0,6704	0,8506	0,9353
Log(0,1)	1,2127	0.0020	0,0239	0,0992	0,2346	0,4009	0,6926	0,8607	0,9387
CN(0.3,2)	1,3190	0.0020	0,0251	0,0987	0,2237	0,3724	0,6462	0,8246	0,9178
Lp(0,1)	1,6364	0.0020	0,0178	0,066	0,1534	0,2682	0,5110	0,7016	0,8259
CN(0.3,4)	2,3311	0.0020	0,0206	0,0735	0,1575	0,2558	0,4491	0,6005	0,7096
CN(0.3,6)	3,3438	0,0020	0,0210	0,0710	0,1480	0,2381	0,4133	0,5540	0,6567
CN(0.3,8)	4,3359	0.0020	0,0202	0,0689	0,1426	0,2286	0,3968	0,5322	0,6331

Tabela 4.33: Valores da Função Potência para a Carta do Desvio Absoluto da Média com quantis (n=10)

Modelo	$\tau$	1	1,25	1,5	1,75	2	2,5	3	3,5
N(0,1)	1,0000	0.0020	0,0461	0,2032	0,4286	0,6322	0,8687	0,9548	0,9839
t(9)	1,1641	0.0020	0,0296	0,1299	0,3014	0,4909	0,7735	0,9084	0,9635
Log(0,1)	1,2127	0.0020	0,0296	0,1282	0,2950	0,4802	0,7606	0,9001	0,9586
CN(0.3,2)	1,3190	0.0020	0,0285	0,1201	0,2732	0,4460	0,7263	0,8782	0,9472
Lp(0,1)	1,6364	0.0020	0,0213	0,0843	0,1955	0,3331	0,5970	0,7774	0,8811
CN(0.3,4)	2,3311	0.0020	0,0203	0,0724	0,1580	0,2626	0,4707	0,6363	0,7553
CN(0.3,6)	3,3438	0.0020	0,0183	0,0639	0,1358	0,2231	0,3991	0,5466	0,6572
CN(0.3,8)	4,3359	0.0020	0,0185	0,0628	0,1321	0,2144	0,3803	0,5173	0,6218

Tabela 4.34: Valores da Função Potência para a Carta da Amplitude com quantis (n=5)

Modelo	$\tau$	1	1,25	1,5	1,75	2	2,5	3	3,5
N(0,1)	1,0000	0.0020	0,0251	0,0973	0,2121	0,3437	0,5757	0,7314	0,8289
t(9)	1,1641	0.0020	0,0122	0,0415	0,0964	0,1738	0,3593	0,5334	0,6675
Log(0,1)	1,2127	0.0019	0,0141	0,0470	0,1061	0,1849	0,3684	0,5359	0,6664
CN(0.3,2)	1,3190	0.0020	0,0155	0,0502	0,1068	0,1794	0,3445	0,5031	0,6333
Lp(0,1)	1,6364	0.0020	0,0116	0,0347	0,0739	0,1272	0,2570	0,3917	0,5117
CN(0.3,4)	2,3311	0.0020	0,0129	0,0393	0,0797	0,1307	0,2408	0,3416	0,4269
CN(0.3,6)	3,3438	0.0020	0,0132	0,0379	0,0763	0,1229	0,2256	0,3222	0,4026
CN(0.3,8)	4,3359	0.0019	0,0128	0,0369	0,0735	0,1188	0,2182	0,3103	0,3890



Tabela 4.35: Valores da Função Potência para a Carta da Amplitude Total com quantis ( $n=5$ )

Modelo	$\tau$	1	1,25	1,5	1,75	2	2,5	3	3,5
N(0,1)	1,0000	0,0020	0,0281	0,1079	0,2312	0,3678	0,5999	0,7512	0,8418
t(9)	1,1641	0,0019	0,0140	0,0493	0,115	0,2048	0,4075	0,5822	0,7111
Log(0,1)	1,2127	0,0020	0,0148	0,0521	0,1185	0,2072	0,4033	0,5746	0,7016
CN(0.3,2)	1,3190	0,0020	0,0172	0,0577	0,1231	0,2051	0,3863	0,5502	0,6784
Lp(0,1)	1,6364	0,0021	0,0124	0,0391	0,0843	0,1448	0,2890	0,4325	0,5557
CN(0.3,4)	2,3311	0,0020	0,0136	0,0420	0,0858	0,1400	0,2560	0,3620	0,4511
CN(0.3,6)	3,3438	0,0020	0,0128	0,0381	0,0770	0,1263	0,2322	0,3303	0,4117
CN(0.3,8)	4,3359	0,0020	0,0127	0,0378	0,0757	0,1231	0,2250	0,3191	0,3980

Tabela 4.36: Valores da Função Potência para a Carta do Desvio Absoluto da Média com quantis ( $n=5$ )

Modelo	$\tau$	1	1,25	1,5	1,75	2	2,5	3	3,5
N(0,1)	1,0000	0,0020	0,0253	0,0968	0,2104	0,3400	0,5703	0,7276	0,8251
t(9)	1,1641	0,0020	0,0148	0,0526	0,1215	0,2129	0,4158	0,589	0,7156
Log(0,1)	1,2127	0,0020	0,0158	0,0559	0,1258	0,2173	0,4155	0,5856	0,7098
CN(0.3,2)	1,3190	0,0020	0,0165	0,0552	0,1189	0,2002	0,3802	0,5444	0,6729
Lp(0,1)	1,6364	0,0020	0,0126	0,0395	0,0853	0,1473	0,2938	0,4378	0,5608
CN(0.3,4)	2,3311	0,0020	0,0153	0,0471	0,0953	0,1523	0,2708	0,3767	0,4656
CN(0.3,6)	3,3438	0,0020	0,0149	0,0464	0,0929	0,1470	0,2573	0,3527	0,4300
CN(0.3,8)	4,3359	0,0020	0,0141	0,0440	0,0897	0,1434	0,2509	0,3442	0,4185

Em relação às cartas de controlo q das estatísticas de dispersão considerou-se utilizar as mesmas diferenças no parâmetro  $\sigma$  que foram utilizadas para as cartas  $3\text{-}\sigma$ .

**Para amostras de dimensão 10:** verifica-se que a carta de controlo do desvio absoluto da média possui os valores mais elevados das funções potência para distribuições que não possuem nem caudas muito pesadas ou demasiado leves. Quando estamos perante uma pequena alteração no parâmetro esta carta mostra alguma inferioridade em relação às outras cartas utilizadas em distribuições pesadas. Para dados provenientes da distribuição Normal, a carta de controlo da amplitude total tem os valores mais elevados. Também quando existem pequenas alterações no parâmetro em dados provenientes de distribuições mais pesadas esta carta também revela ser mais potente. A carta q da amplitude não mostra superioridade em nenhum caso.

**Para amostras de dimensão 5:** a carta do desvio absoluto da média apresenta valores da função potência superiores para a maioria dos casos com a exceção de quando temos dados provenientes da distribuição normal e da CN(0.3,2). Nestes casos a carta da amplitude total mostra-se como sendo a mais robusta para tal. Para uma amostra de dimensão 5, a carta q da amplitude, também se mostra como sendo pouco potente em relação às restantes.

## 4.6 Comparações entre Cartas $3\sigma$ e Cartas $q$

### 4.6.1 Amostras provenientes de $Lp(0,1)$

Recorrendo aos valores das funções potência obtidos para as diferentes cartas, quando utilizados dados provenientes de uma distribuição  $Lp(0,1)$ , produziu-se quatro gráficos com o objetivo de facilitar a visualização de diferenças entre as cartas das estatísticas de localização e dimensões consideradas.

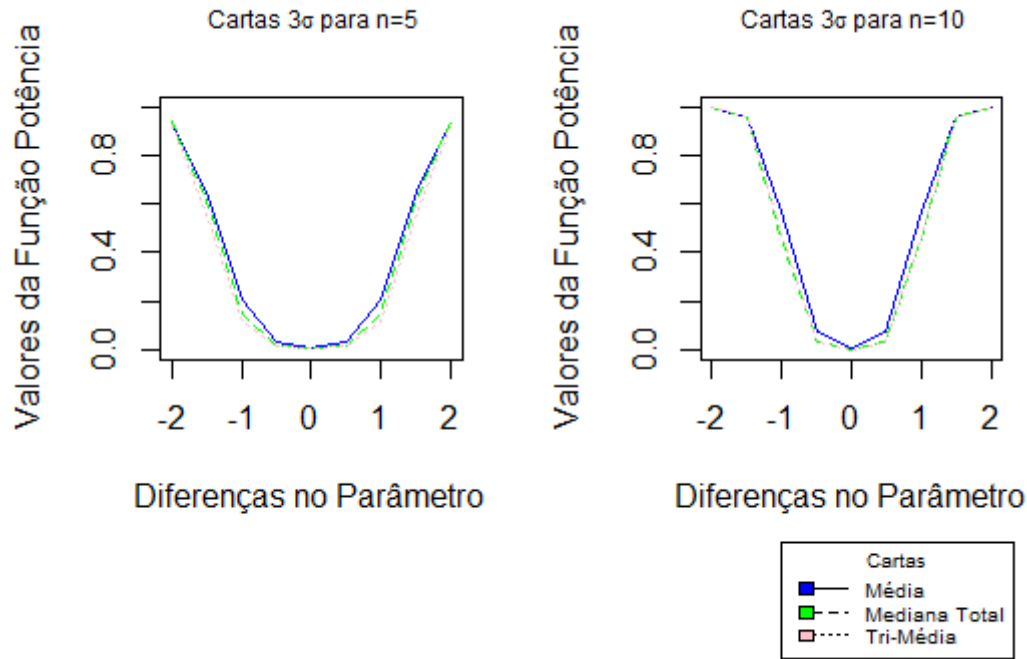


Figura 4.1: Valores das funções potência das cartas  $3\sigma$  de estimadores de localização, calculados a partir de dados provenientes de uma  $Lp(0,1)$  para  $n=10$  e 5

Comparando as diferentes dimensões consideradas e as cartas  $\sigma$  e  $q$ . Podemos observar que de modo geral os valores das funções potência das cartas, quando aplicadas em amostras com dimensão 10, são superiores aos valores das funções potência quando aplicadas em amostras de dimensão 5. Em relação às cartas  $3\sigma$  ficamos com uma falsa impressão de que a carta de médias é a melhor.

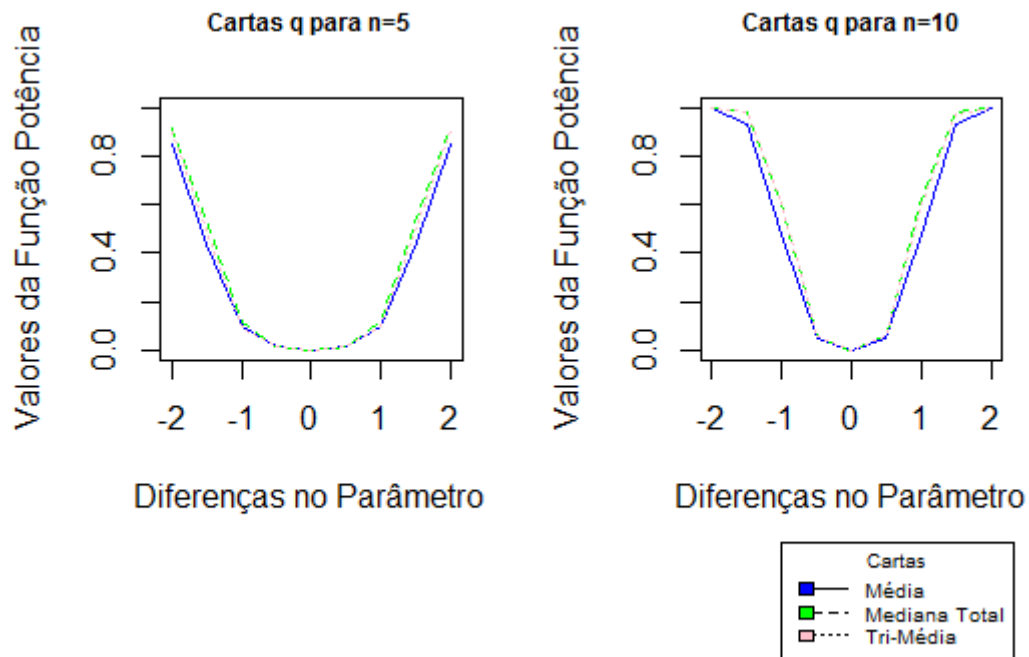


Figura 4.2: Valores das funções potência das cartas q de estimadores de localização, calculados a partir de dados provenientes de uma  $Lp(0,1)$  para  $n=10$  e 5

O que permite compararmos as qualidades das diferentes cartas q. No entanto, as cartas  $3-\sigma$  têm valores distintos das taxas de falso alarme, o que não nos permite compará-las de modo adequado. Sendo que deste modo não é correto comparar cartas  $3-\sigma$  em que se considera diferentes dimensões ou estimadores. Já as cartas q têm todas aproximadamente uma taxa de falso alarme de 0.002, sendo por isso comparáveis. Na generalidade, utilizando uma dimensão  $n=10$  para as cartas q obtém-se valores das funções potência mais elevados do que quando utiliza-se uma dimensão  $n=5$ . Graficamente verifica-se que os valores da função potência das cartas q da mediana total e da tri-média são bastante próximos e na maioria dos casos superiores aos da carta q da média. Comparando os valores da [Tabela 4.29] e da [Tabela 4.30], verificamos que a carta q da mediana total é um pouco melhor do que a da tri-média a detetar alterações no valor médio para  $n=10$ , apesar de não ser uma diferença significativa. Para  $n=5$  a carta q da tri-média apenas se revela ser melhor a detetar grandes alterações para distribuições mais pesadas.

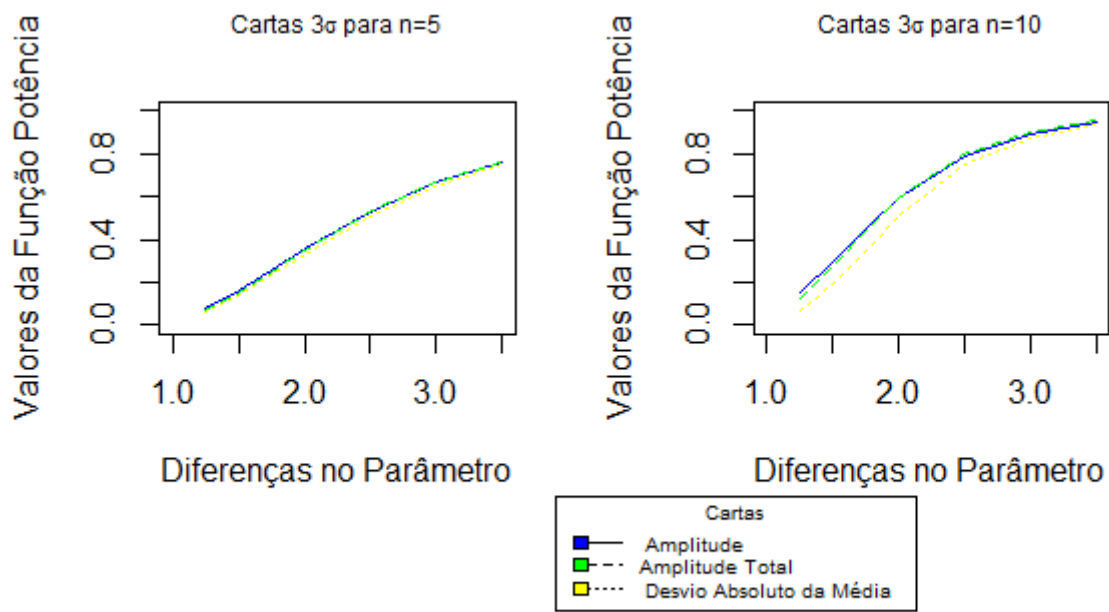


Figura 4.3: Valores das funções potência das cartas q de estimadores de dispersão, calculados a partir de dados provenientes de uma  $Lp(0,1)$  para  $n=10$  e 5

A partir dos valores das funções potência das cartas das estatísticas de dispersão, quando utilizados dados provenientes de uma  $Laplace(0,1)$ , criaram-se quatro gráficos de linhas. Cada um corresponde a um tipo de cartas considerado e uma dimensão. Observa-se que os valores das funções potência das cartas de controlo  $3-\sigma$  convergem para valores mais altos, do que quando utiliza-se cartas q. Para uma dimensão de 5 e para ambas as cartas verifica-se que não existem grandes diferenças entre os valores das funções potência das cartas das estatísticas em questão.

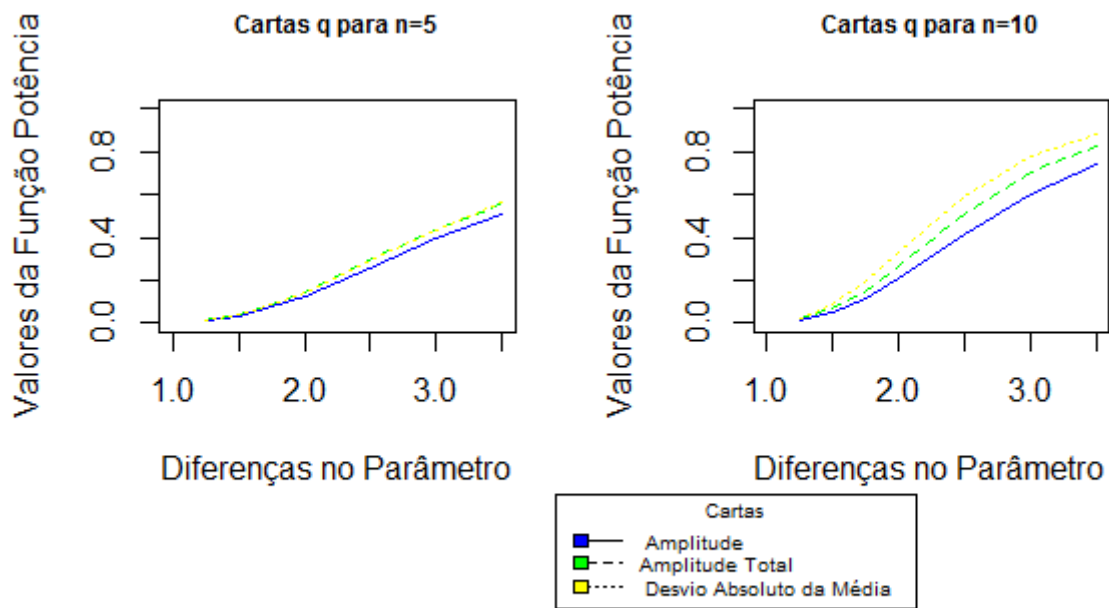


Figura 4.4: Valores das funções potência das cartas q de estimadores de dispersão, calculados a partir de dados provenientes de uma  $Lp(0,1)$  para  $n=10$  e 5

Isto tanto acontece para a carta  $3-\sigma$  como para a carta q. Quando temos uma dimensão de 10 já existem algumas diferenças significativas. A carta q de desvio absoluto da média apresenta os valores superiores. No entanto a carta  $3-\sigma$  apresenta valores inferiores para algumas das diferenças no parâmetro. Nas cartas  $3-\sigma$  verificamos que as taxas de falso alarme são diferentes de distribuição para distribuição e de estimador pra estimador o que torna inválida uma comparação entre estas cartas. Em relação às cartas q, as taxas de falso alarme são iguais ou bastante próximas do valor considerado para ( $\alpha=0.002$ ) para todas as distribuições e para todos os estimadores, assim é válido comparar as diferentes cartas q.

#### 4.6.2 Amostras provenientes de $CN(0.3,4)$

Como já verificámos, não é válido comparar as cartas  $3-\sigma$ , logo vamos apenas ter em conta as cartas de quantis para comparações.

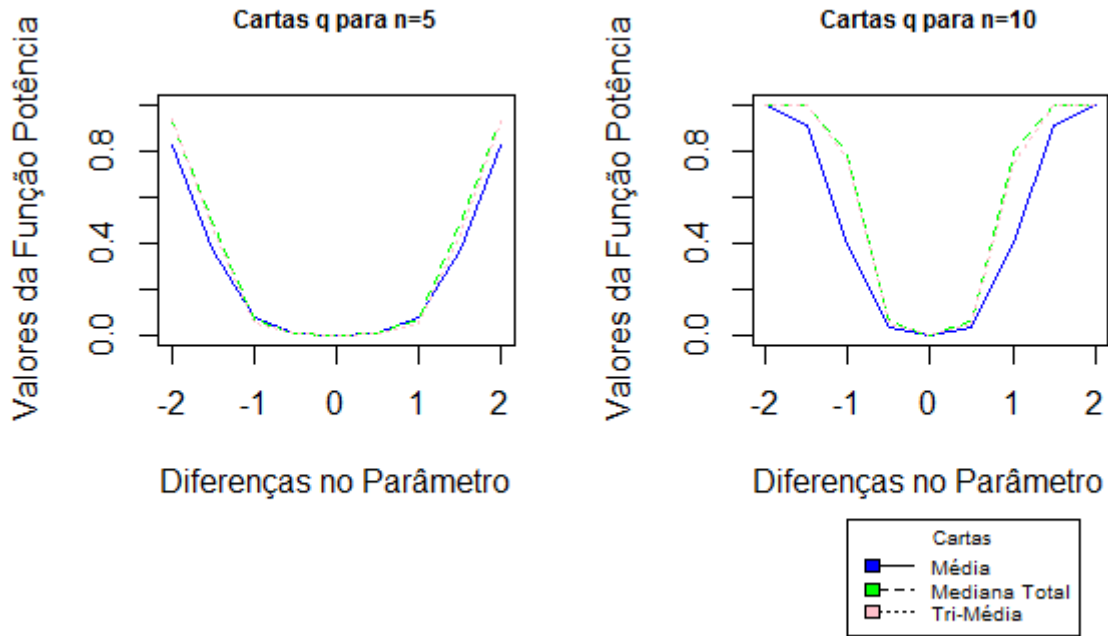


Figura 4.5: Valores das funções potência das cartas de quantis dos estimadores de localização, calculados a partir de dados provenientes de uma  $CN(0.3,4)$  para  $n=10$  e  $5$

Par amostras provenientes de uma  $CN(0.3,4)$ , voltamos a verificar valores mais altos das funções potência para quando são utilizadas amostras de dimensão 10. Onde a carta da tri-média e da mediana total apresentam superiodidade perante a carta da média. Não se verificam diferenças significativas entre as cartas da tri-média e da mediana total. Em ambas as dimensões consideradas, as cartas apresentam baixos valores das funções potência para pequenas alterações  $(-0.5,0.5)$  no parâmetro. Para os estimadores de dispersão verifica-se a superioridade do desvio absoluto da média tanto para uma dimensão  $n=5$  ou  $n=10$ . Para uma dimensão  $n=10$ , esta diferença é mais significativa.

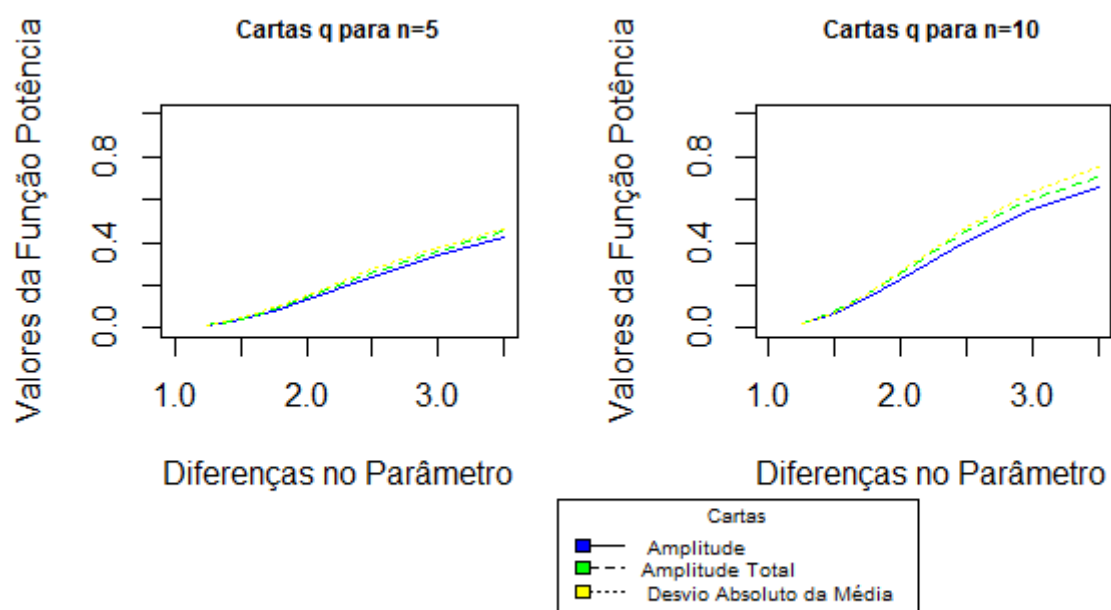


Figura 4.6: Valores das funções potência das cartas de quantis dos estimadores de dispersão, calculados a partir de dados provenientes de uma  $CN(0.3,4)$  para  $n=10$  e 5

## 4.7 Cartas de Quantis com Transformação Box-Cox

### 4.7.1 Transformação Box-Cox

Como já referido anteriormente a normalidade e a independência nas amostras raramente é encontrada. A partir daqui é por vezes necessário aplicar a transformação Box-Cox. Sendo esta, quando  $x_i > 0$  dada por:

$$Y_i^{(\lambda)} = \begin{cases} (x_i^\lambda - 1)/\lambda & \text{se } \lambda \neq 0 \\ \log(x_i) & \text{se } \lambda = 0 \end{cases} \text{ para } i \leq n$$

Quando  $x_i$  toma valores negativos considera-se esta expressão:

$$Y_i^{(\lambda)} = \begin{cases} ((x_i^{\lambda_1} + \lambda_2) - 1)/\lambda_1 & \text{se } \lambda_1 \neq 0 \\ \log(x_i + \lambda_2) & \text{se } \lambda_1 = 0 \end{cases} \text{ para } i \leq n$$

Apenas  $\lambda_1$  corresponde ao valor do parâmetro  $\lambda$ .  $\lambda_2$  é escolhido de tal modo que  $x + \lambda_2 > 0$ .

Para encontrar o valor ideal de  $\lambda$ , há que considerar quando as observações  $Y^{(\lambda)}$  estarão o mais perto da normalidade possível, com valor médio  $\mu_\lambda$  e variância  $\sigma_\lambda^2$ . Existem diversos métodos tal como o método da máxima verosimilhança e o método de  $R^2$  com a utilização do papel de probabilidade. Neste estudo foi o utilizado o método da máxima verosimilhança.

### Método da Máxima Verosimilhança

Em Box, G. E., Cox, D. R.<sup>[1]</sup>, é apresentado o método da máxima verosimilhança para  $\lambda$ . Assume-se que para as observações transformadas  $y_i^{(\lambda)}$ ,  $i=1, \dots, n$ , para um  $\lambda$  desconhecido, são identicamente distribuídas e com variância constante  $\sigma^2$ . Para encontrar a função de máxima verosimilhança de  $Y_i^{(\lambda)}$  em relação às observações originais de  $Y_i$ , é necessário multiplicar a função de máxima verosimilhança pelo jacobiano da transformação.

$$L(Y_i^{(\lambda)}, \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma^n (2\pi)^{n/2}} \exp \frac{-\sum_{i=1}^n (Y_i^{(\lambda)} - \mu)^2}{2\sigma^2} J(\lambda, Y), \text{ sendo o jacobiano dado por:}$$

$$J(\lambda, Y) = \prod_{i=1}^n \left| \frac{\partial Y_i^{(\lambda)}}{\partial Y_i} \right| = \prod_{i=1}^n Y_i^{\lambda-1}$$

Como estimadores para os parâmetros teremos:

$$\widehat{\mu}_\lambda = \bar{Y}^{(\lambda)} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i^{(\lambda)}}{n}$$

$$\widehat{\sigma}_\lambda^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i^{(\lambda)} - \bar{Y}^{(\lambda)})^2}{n}$$

Aplicando o logaritmo na função de verosimilhança ficamos com a seguinte função:

$$l(\lambda) = \log[L(\lambda|Y_i, \widehat{\mu}, \widehat{\sigma}^2)] = -\frac{n\pi}{2} - \frac{\log(\widehat{\sigma}_\lambda^2)}{2} + (1 - \lambda)\log(Y_i)$$

O objetivo aqui é encontrar  $\lambda$  de modo a maximizar a função logaritmica de verosimilhança. Para tal pode-se utilizar a normalização da transformação,  $Z_i^{(\lambda)}$ . Assim o jacobiano  $J(\lambda, Z)$  será 1.

$$Z_i^{(\lambda)} = \frac{Y_i^{(\lambda)}}{J(\lambda, Y)^{1/n}}$$



$$l(\lambda) = \log[L(\lambda, Z_i, \hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)] = -\frac{n\pi}{2} - \frac{\log(\hat{\sigma}^2(Z, \lambda))}{2}$$

$$\hat{\sigma}^2(Z, \lambda) = \frac{\sum_{i=1}^n (Z_i^{(\lambda)} - \overline{Z^{(\lambda)}})^2}{n}$$

Se maximizarmos o logaritmo da função de verosimilhança, estaremos a encontrar o mínimo da variância em relação a  $\lambda$ .

Para encontrar o valor ideal de  $\lambda$  são gerados vários valores para  $\lambda$  de -2.5 a 2.5 com uma diferença relativamente pequena, 0.01 ou 0.001. Onde o valor de  $l(\lambda)$  atinge o seu máximo, escolheremos o correspondente  $\lambda$ .

Em Figueiredo, F. e Gomes, M.I.<sup>[6]</sup>, são utilizadas cartas de controlo com a utilização da transformação Box-Cox. Para a aplicação da transformação Box-Cox é necessário valores positivos, logo apenas consideramos informação proveniente de distribuições assimétricas com domínio positivo. Isto porque não vamos considerar a troca de localização para transformar todos os valores de modo a que fiquem positivos.

Como vamos analisar as cartas de controlo em distribuições assimétricas, poderemos neste caso ter em conta os coeficientes de assimetria das distribuições. Iremos considerar  $\chi^2(20)$  que tem como coeficiente de assimetria  $\gamma=0.6325$ , sendo a distribuição com peso de caudas e coeficiente de assimetria menor neste conjunto. Duas distribuições gamma vão estar no conjunto  $G(1)$  e  $G(0.75)$ , com  $\gamma=2.0003$  e  $1.9996$ , como também distribuições weibull  $W(0.75)$  e  $W(0.5)$ , com  $\gamma=3.1252$  e  $6.6544$ . Apenas vamos considerar uma distribuição Log-Normal no conjunto,  $LN(0,1)$  com  $\gamma=6.1108$ .

Estas cartas possuem limites baseados nos quantis dos estimadores de informação proveniente da distribuição  $N(0,1)$ . Ao contrário das cartas de quantis apresentadas anteriormente em que os quantis são baseados nos valores da distribuição dos estimadores em questão, aqui usaremos sempre a distribuição  $N(0,1)$  para definir os quantis. Nestas cartas usaremos dois métodos, sem transformação Box-Cox e com transformação Box-Cox. Para calcular as taxas de falso alarme recorreu-se a 500000 amostras aleatórias para cada dimensão, estimador e modelo considerado. Quando estamos a utilizar as cartas sem a transformação Box-Cox, recorreremos apenas à standardização da informação gerada. Após a standardização calcula-se as estatísticas correspondentes às cartas e a proporção destas que se encontrem fora dos limites estabelecidos. Essa proporção é a estimativa da taxa de falso alarme.

Quando se considera a transformação Box-Cox, esta é realizada antes da standardização. O valor médio e o desvio padrão utilizados na standardização são os correspondentes à informação transformada a partir de Box-Cox sendo designados por  $\mu_\lambda$  e  $\sigma_\lambda$ . Sendo a transformação Box-Cox representada por  $Y = \frac{(X^\lambda - 1)}{\lambda}$  e a standardização  $Z = \frac{(Y - \mu_\lambda)}{\sigma_\lambda}$  no caso de considerarmos a transformação Box-Cox a priori ou então  $Z = \frac{(X - \mu)}{\sigma}$  sem a transformação Box-Cox. Os valores de  $\mu_\lambda$  e  $\sigma_\lambda$  podem ser estimados. Existem diversos métodos para encontrar o valor do lambda, sendo que um deles é o método da máxima verosimilhança. Utilizou-se o método da máxima verosimilhança para todas as amostras das diferentes distribuições.

#### 4.7.2 Taxas de Falso Alarme

Para as cartas de controlo das estatísticas de localização, sem a transformação Box-Cox, verifica-se que a carta de controlo da média é aquela que possui as taxas de falso alarme mais elevadas

para a maioria dos casos. As cartas de controlo da mediana total e da tri-média apesar de terem taxas de falso alarme mais baixas, continuam distantes do 0.0020. Sendo que para dimensões superiores das amostras, as taxas de falso alarme diminuem para valores demasiado baixos. Em relação às cartas de controlo das estatísticas de dispersão, sem a transformação Box-Cox, a amplitude é a carta com as taxas de falso alarme mais elevadas. Para dimensões superiores, a carta do desvio absoluto da média, tem as taxas de falso alarme mais baixas. Para dimensões mais pequenas, a carta de controlo da amplitude total, é aquela com as taxas de falso alarme mais baixas e por sua vez mais próximas de 0.0020.

Segundo as tabelas correspondentes aos valores das estimativas das taxas de falso alarmes das cartas de estimadores de localização, com a transformação Box-Cox, as taxas de falso alarme encontram-se mais próximas de 0.002 do que quando não se aplica a transformação. Nas cartas de estimadores de dispersão, com a transformação Box-Cox as taxas de falso alarme tornam-se de modo geral inferiores a 0.0020. Para  $n=5$  e  $n=6$  as cartas da tri-média e mediana total com transformação Box-Cox demonstram ser relativamente robustas, pois os valores das taxas de falso alarme estão próximos ou são iguais a 0.0020. De entre as várias cartas de estimadores de dispersão a carta do desvio absoluto da média é aquela cujas taxas de falso alarme se aproximam mais de 0.002 sendo esta carta considerada mais robusta do que as cartas de amplitude e amplitude total.

Tabela 4.37: Valores dos Lambda's para os modelos considerados

Modelo	$\chi^2(20)$	G(1)	G(0.75)	W(0.75)	LN(1)	W(0.5)
$\lambda$	0,35	0,25	0,25	0,2	0	0,15

Tabela 4.38: Taxas de Falso Alarme da carta da Média com quantis

Modelo	$\tau$	3	4	5	6	7	12	16	20
$\chi^2(20)$	1,002	0,0031	0,0032	0,0029	0,0026	0,0025	0,0025	0,0022	0,0021
G(1)	1,062	0,0101	0,0093	0,0081	0,0075	0,0067	0,0051	0,0045	0,0041
G(0.75)	1,105	0,0120	0,0108	0,0095	0,0087	0,0077	0,0059	0,0053	0,0045
W(0.75)	1,305	0,0150	0,0135	0,0125	0,0119	0,0106	0,0085	0,0072	0,0064
LN(1)	1,658	0,0159	0,0157	0,0151	0,0147	0,0143	0,0127	0,0111	0,0105
W(0.5)	2,260	0,0191	0,0180	0,0173	0,0172	0,0169	0,0146	0,0134	0,0122

Tabela 4.39: Taxas de Falso Alarme da carta da Mediana Total com quantis

Modelo	$\tau$	3	4	5	6	7	12	16	20
$\chi^2(20)$	1,002	0,0033	0,0028	0,0024	0,0022	0,0019	0,0018	0,0016	0,0018
G(1)	1,062	0,0088	0,0058	0,0037	0,0028	0,0019	0,0005	0,0002	0,0002
G(0.75)	1,105	0,0094	0,0065	0,0035	0,0026	0,0018	0,0004	0,0002	0,0001
W(0.75)	1,3050	0,0109	0,0069	0,0035	0,0024	0,0013	0,0002	0,0001	0,0000
LN(1)	1,658	0,0112	0,0074	0,0024	0,0016	0,0007	0,0001	0,0000	0,0000
W(0.5)	2,260	0,0126	0,0085	0,0025	0,0014	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000

Tabela 4.40: Taxas de Falso Alarme da carta da Tri-Média com quantis

Modelo	$\tau$	3	4	5	6	7	12	16	20
$\chi^2(20)$	1,002	0,0035	0,0025	0,0022	0,0019	0,0019	0,0018	0,0018	0,0018
G(1)	1,062	0,0070	0,0047	0,0030	0,0024	0,0018	0,0006	0,0003	0,0004
G(0.75)	1,105	0,0069	0,0049	0,0028	0,0025	0,0016	0,0005	0,0002	0,0002
W(0.75)	1,305	0,0072	0,0044	0,0024	0,0018	0,0013	0,0002	0,0001	0,0001
LN(1)	1,658	0,0054	0,0028	0,0012	0,0009	0,0006	0,0001	0,0000	0,0000
W(0.5)	2,260	0,0052	0,0030	0,0012	0,0009	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000

Tabela 4.41: Taxas de Falso Alarme da carta da Amplitude com quantis

Modelo	$\tau$	3	4	5	6	7	12	16	20
$\chi^2(20)$	1,002	0,0041	0,0045	0,0046	0,0049	0,0054	0,0060	0,0063	0,0068
G(1)	1,062	0,0169	0,0198	0,0213	0,0228	0,0243	0,0305	0,0339	0,0386
G(0.75)	1,105	0,0187	0,0225	0,0249	0,0269	0,0282	0,0363	0,0405	0,0456
W(0.75)	1,305	0,0242	0,0285	0,0328	0,0361	0,0395	0,0522	0,0621	0,0701
LN(1)	1,658	0,0237	0,0291	0,0342	0,0381	0,0427	0,0608	0,0748	0,0869
W(0.5)	2,260	0,0274	0,0341	0,0386	0,0438	0,0471	0,0701	0,0842	0,0989

Tabela 4.42: Taxas de Falso Alarme da carta da Amplitude Total com quantis

Modelo	$\tau$	3	4	5	6	7	12	16	20
$\chi^2(20)$	1,002	0,0043	0,0042	0,0044	0,0047	0,0047	0,0051	0,0057	0,0060
G(1)	1,062	0,0161	0,0179	0,0189	0,0197	0,0208	0,0261	0,0289	0,0320
G(0.75)	1,105	0,0192	0,0205	0,0222	0,0237	0,0248	0,0307	0,0350	0,0386
W(0.75)	1,305	0,0238	0,0272	0,0293	0,0315	0,0326	0,0428	0,0499	0,0576
LN(1)	1,658	0,0239	0,0268	0,0300	0,0325	0,0359	0,0494	0,0604	0,0700
W(0.5)	2,260	0,0279	0,0312	0,0331	0,0361	0,0397	0,0547	0,0654	0,0760

Tabela 4.43: Taxas de Falso Alarme da carta do Desvio Absoluto da Média com quantis

Modelo	$\tau$	3	4	5	6	7	12	16	20
$\chi^2(20)$	1,002	0,0053	0,0043	0,0043	0,0043	0,0044	0,0040	0,0039	0,0035
G(1)	1,062	0,0215	0,0223	0,0219	0,0225	0,0217	0,0200	0,0185	0,0166
G(0.75)	1,105	0,0246	0,0253	0,0265	0,0269	0,0267	0,0233	0,0216	0,0203
W(0.75)	1,305	0,0310	0,0328	0,0339	0,0356	0,0350	0,0313	0,0282	0,0265
LN(1)	1,658	0,0292	0,0322	0,0346	0,0352	0,0350	0,0328	0,0308	0,0284
W(0.5)	2,260	0,0338	0,0383	0,0410	0,0414	0,0425	0,0399	0,0364	0,0331

Tabela 4.44: Taxas de Falso Alarme da carta da Média com quantis com transformação Box-Cox

Modelo	$\tau$	3	4	5	6	7	12	16	20
$\chi^2(20)$	1,002	0,0018	0,0019	0,0019	0,0020	0,0021	0,0019	0,0019	0,0019
G(1)	1,062	0,0015	0,0018	0,0017	0,0018	0,0018	0,0019	0,0019	0,0020
G(0.75)	1,105	0,0012	0,0015	0,0016	0,0017	0,0017	0,0018	0,0018	0,0019
W(0.75)	1,305	0,0015	0,0016	0,0016	0,0018	0,0019	0,0019	0,0019	0,0021
LN(1)	1,658	0,0020	0,0020	0,0021	0,0019	0,0020	0,0020	0,0021	0,0021
W(0.5)	2,260	0,0016	0,0016	0,0017	0,0017	0,0017	0,0018	0,0021	0,0019

Tabela 4.45: Taxas de Falso Alarme da carta da Mediana Total com quantis com transformação Box-Cox

Modelo	$\tau$	3	4	5	6	7	12	16	20
$\chi^2(20)$	1,002	0,0020	0,0019	0,0019	0,0020	0,0020	0,0019	0,0021	0,0021
G(1)	1,062	0,0015	0,0017	0,0020	0,0021	0,0022	0,0023	0,0027	0,0026
G(0.75)	1,105	0,0014	0,0017	0,0018	0,0019	0,0023	0,0027	0,0027	0,0027
W(0.75)	1,305	0,0015	0,0018	0,0019	0,0020	0,0024	0,0024	0,0025	0,0025
LN(1)	1,658	0,0019	0,0019	0,0019	0,0019	0,0020	0,0020	0,0020	0,0020
W(0.5)	2,260	0,0016	0,0017	0,0020	0,0021	0,0022	0,0026	0,0027	0,0027

Tabela 4.46: Taxas de Falso Alarme da carta da Tri-Média com quantis com transformação Box-Cox

Modelo	$\tau$	3	4	5	6	7	12	16	20
$\chi^2(20)$	1,002	0,002	0,0018	0,0020	0,0020	0,0021	0,0020	0,0020	0,0021
G(1)	1,062	0,0017	0,0019	0,0021	0,0023	0,0021	0,0024	0,0026	0,0025
G(0.75)	1,105	0,0012	0,0019	0,0021	0,0020	0,0024	0,0027	0,0028	0,0028
W(0.75)	1,305	0,0015	0,0019	0,0020	0,0022	0,0021	0,0026	0,0025	0,0026
LN(1)	1,658	0,0020	0,0020	0,0020	0,0019	0,0021	0,0020	0,0020	0,0020
W(0.5)	2,260	0,0016	0,0018	0,0021	0,0023	0,0021	0,0024	0,0025	0,0025

Tabela 4.47: Taxas de Falso Alarme da carta da Amplitude com quantis com transformação Box-Cox

Modelo	$\tau$	3	4	5	6	7	12	16	20
$\chi^2(20)$	1,002	0,0019	0,0018	0,0018	0,0020	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016
G(1)	1,062	0,0009	0,0007	0,0006	0,0005	0,0005	0,0002	0,0002	0,0001
G(0.75)	1,105	0,0006	0,0004	0,0003	0,0003	0,0002	0,0001	0,0001	0,0000
W(0.75)	1,305	0,0009	0,0007	0,0006	0,0005	0,0004	0,0002	0,0002	0,0001
LN(1)	1,658	0,0020	0,0021	0,0020	0,0020	0,0020	0,0021	0,0020	0,0021
W(0.5)	2,260	0,0009	0,0008	0,0006	0,0005	0,0005	0,0003	0,0002	0,0002

Tabela 4.48: Taxas de Falso Alarme da carta da Amplitude Total com quantis com transformação Box-Cox

Modelo	$\tau$	3	4	5	6	7	12	16	20
$\chi^2(20)$	1,002	0,0015	0,0014	0,0015	0,0014	0,0015	0,0012	0,0013	0,0011
G(1)	1,062	0,0010	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0004	0,0003	0,0002
G(0.75)	1,105	0,0007	0,0006	0,0005	0,0004	0,0003	0,0002	0,0001	0,0001
W(0.75)	1,305	0,0009	0,0009	0,0008	0,0007	0,0006	0,0004	0,0002	0,0002
LN(1)	1,658	0,0019	0,0020	0,0020	0,0020	0,0019	0,0020	0,0021	0,0019
W(0.5)	2,260	0,0008	0,0008	0,0008	0,0006	0,0006	0,0004	0,0003	0,0002

Tabela 4.49: Taxas de Falso Alarme da carta do Desvio Absoluto da Média com quantis com transformação Box-Cox

Modelo	$\tau$	3	4	5	6	7	12	16	20
$\chi^2(20)$	1,002	0,0018	0,0019	0,0018	0,0020	0,0020	0,0020	0,0019	0,0021
G(1)	1,062	0,0010	0,0013	0,0014	0,0014	0,0014	0,0017	0,0017	0,0017
G(0.75)	1,105	0,0007	0,0011	0,0010	0,0011	0,0012	0,0014	0,0015	0,0017
W(0.75)	1,305	0,0009	0,0013	0,0014	0,0012	0,0014	0,0014	0,0016	0,0017
LN(1)	1,658	0,0021	0,0021	0,0020	0,0021	0,0021	0,0021	0,0019	0,0020
W(0.5)	2,260	0,0010	0,0013	0,0013	0,0013	0,0014	0,0017	0,0016	0,0016

### 4.7.3 Valores das Funções Potência

Como as cartas de controlo dos estimadores com transformação Box-Cox mostraram-se ser mais robustas do que as que apenas utilizavam a standardização, calculou-se os valores das funções potência apenas para as cartas com transformação Box-Cox. Em Figueiredo, F. e Gomes, M.I.<sup>[6]</sup>, não foram apresentados dados em relação às funções potência portanto vamos considerar calcula os valores das funções potência para  $n=5$ , a dimensão usualmente utilizada. Em relação aos estimadores de localização é possível observar que a carta da média é aquela que é menos robusta ou seja os valores da taxa de falso alarme são no geral mais distantes do valor pré-definido de  $\alpha=0.0020$ . Em relação às cartas da mediana total e da tri-média conclui-se que ambas demonstram ter mais robustez do que a carta da média. No entanto a carta da mediana total tem mais valores da taxa de falso alarme iguais a 0.0020 do que a tri-média, o que a torna mais robusta perante os dados apresentados. Além disso, os valores das funções potência são mais elevados na carta da mediana total, o que a torna a melhor carta em relação às cartas dos estimadores de localização.

Nas cartas dos estimadores de escala, observámos que os valores das taxas de falso alarme eram relativamente diferentes de 0.0020, o que as tornava pouco robustas. No entanto a carta do desvio absoluto da média apresenta as taxas mais próximas de 0.0020, o que a torna a carta dos estimadores de escala mais robusta. Em relação aos valores das funções potência, a carta do desvio absoluto da média não possui os valores mais altos o que a torna menos potente em relação às restantes cartas. Mas como estamos a dar prioridade à robustez das cartas, iremos considerar a carta do desvio absoluto da média como a melhor das cartas correspondentes aos estimadores de escala.

Tabela 4.50: Valores da Função Potência da Carta de Controlo da Média de quantis com transformação Box-Cox

Modelo	$\tau$	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
$\chi^2(20)$	1,002	0,9144	0,5973	0,1926	0,0235	0,0019	0,0238	0,1955	0,6030	0,9159
G(1)	1,062	0,9134	0,6009	0,1955	0,0223	0,0017	0,0251	0,1986	0,6005	0,9167
G(0.75)	1,105	0,9148	0,6049	0,1965	0,0227	0,0016	0,0246	0,1951	0,5974	0,9160
W(0.75)	1,305	0,9159	0,6159	0,2020	0,0212	0,0018	0,0267	0,1906	0,5888	0,9166
LN(1)	1,658	0,9175	0,6073	0,1994	0,0250	0,0020	0,0241	0,1955	0,6019	0,9156
W(0.5)	2,260	0,9169	0,6026	0,1966	0,0248	0,0017	0,0238	0,2014	0,6086	0,9165

Tabela 4.51: Valores da Função Potência da Carta de Controlo da Mediana Total de quantis com transformação Box-Cox

Modelo	$\tau$	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
$\chi^2(20)$	1,002	0,8841	0,5469	0,1695	0,0208	0,0018	0,0216	0,1724	0,5526	0,8864
G(1)	1,062	0,8872	0,5674	0,1849	0,0227	0,0020	0,0250	0,1774	0,5470	0,8841
G(0.75)	1,105	0,8828	0,5618	0,1850	0,0232	0,0019	0,0254	0,1817	0,5488	0,8823
W(0.75)	1,305	0,8858	0,5615	0,1835	0,0233	0,0020	0,0232	0,1721	0,5405	0,8788
LN(1)	1,658	0,8894	0,5571	0,1747	0,0221	0,0020	0,0210	0,1695	0,5491	0,8852
W(0.5)	2,260	0,8823	0,5505	0,1788	0,0236	0,0020	0,0233	0,1833	0,5585	0,8859

Tabela 4.52: Valores da Função Potência da Carta de Controlo da Tri-Média de quantis com transformação Box-Cox

Modelo	$\tau$	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
$\chi^2(20)$	1,002	0,8551	0,5124	0,1589	0,0216	0,0022	0,0205	0,1549	0,5104	0,8538
G(1)	1,062	0,8487	0,5132	0,1611	0,0201	0,0019	0,0217	0,1526	0,4858	0,8386
G(0.75)	1,105	0,8404	0,5046	0,1600	0,0203	0,0020	0,0233	0,1585	0,4938	0,8386
W(0.75)	1,305	0,8467	0,5108	0,1604	0,0204	0,0021	0,0227	0,1583	0,4984	0,8440
LN(1)	1,658	0,8496	0,4997	0,1504	0,0191	0,0019	0,0198	0,1530	0,5059	0,8519
W(0.5)	2,260	0,8417	0,4998	0,1582	0,0216	0,0020	0,0215	0,1585	0,4998	0,8421

Tabela 4.53: Valores da Função Potência da Carta de Controlo da Amplitude de quantis com transformação Box-Cox

Modelo	$\tau$	1	1,25	-1,5	1,75	2	2,5	3	3,5
$\chi^2(20)$	1,002	0,0019	0,0249	0,0980	0,2146	0,3454	0,5759	0,7326	0,8297
G(1)	1,062	0,0006	0,0189	0,0910	0,2124	0,3515	0,5891	0,7437	0,8386
G(0.75)	1,105	0,0003	0,0152	0,0854	0,2087	0,3525	0,5944	0,7509	0,8422
W(0.75)	1,305	0,0006	0,0184	0,0909	0,2136	0,3520	0,5903	0,7472	0,8404
LN(1)	1,658	0,0019	0,0250	0,0966	0,2108	0,3424	0,5718	0,7285	0,8280
W(0.5)	2,260	0,0006	0,0166	0,0841	0,2056	0,3444	0,5858	0,7431	0,8382

Tabela 4.54: Valores da Função Potência da Carta de Controlo da Amplitude Total de quantis com transformação Box-Cox

Modelo	$\tau$	1	1,25	-1,5	1,75	2	2,5	3	3,5
$\chi^2(20)$	1,002	0,0020	0,0278	0,1085	0,2343	0,3724	0,6036	0,7560	0,8443
G(1)	1,062	0,0007	0,0223	0,1019	0,2329	0,3747	0,6126	0,7615	0,8520
G(0.75)	1,105	0,0005	0,0189	0,0983	0,2323	0,3788	0,6182	0,7703	0,8560
W(0.75)	1,305	0,0007	0,0209	0,0996	0,2292	0,3733	0,6131	0,7625	0,8511
LN(1)	1,658	0,0022	0,0279	0,1090	0,2330	0,3687	0,6012	0,7534	0,8429
W(0.5)	2,260	0,0008	0,0212	0,1022	0,2335	0,3780	0,6176	0,7681	0,8548

Tabela 4.55: Valores da Função Potência da Carta de Controlo da Desvio Absoluto da Média de quantis com transformação Box-Cox

Modelo	$\tau$	1	1,25	-1,5	1,75	2	2,5	3	3,5
$\chi^2(20)$	1,002	0,0021	0,0258	0,0973	0,2122	0,3435	0,5740	0,7308	0,8268
G(1)	1,062	0,0014	0,0227	0,0950	0,2146	0,3488	0,5838	0,7399	0,8349
G(0.75)	1,105	0,0011	0,0211	0,0925	0,2122	0,3493	0,5883	0,7458	0,8387
W(0.75)	1,305	0,0013	0,0219	0,0926	0,2110	0,3473	0,582	0,7397	0,8339
LN(1)	1,658	0,0020	0,0249	0,0951	0,2079	0,3374	0,5698	0,7254	0,8245
W(0.5)	2,260	0,0015	0,0227	0,0954	0,2148	0,3520	0,5871	0,7430	0,8378

## 5 Conclusão

Tal como já referido anteriormente, uma má escolha de uma carta de controlo para a monitorização de um parâmetro de um processo pode provocar sérios problemas. Desde taxas de falso alarme demasiado elevadas, onde a carta considera que o processo já se encontra fora de controlo quando na verdade ainda está sob controlo até à falta da capacidade de detetar alterações no parâmetro, alterações essas que podem fazer com que a carta considere o processo sob controlo quando já ocorreram diversas alterações nos parâmetros em estudo. Para uma boa escolha, de entre as várias possibilidades, para uma carta de controlo é preciso ter em conta a distribuição que o processo em estudo está a seguir. Antes de se escolher uma carta é sempre necessário realizar testes à informação que se pretende analisar, de modo a conseguirmos considerar uma distribuição, para a qual existe evidência de que a informação provém desta.

Tendo em conta as cartas  $3\text{-}\sigma$ , se temos como objetivo estimar o valor médio, já tínhamos referido que as cartas  $3\text{-}\sigma$  dos estimadores de localização apresentam de modo geral taxas de falso alarmes demasiado altas ou demasiado baixas quando a distribuição em questão não é Normal. Apenas para quando a informação é proveniente da distribuição Normal é que estas cartas são consideradas adequadas, apesar de para amostras de dimensão 5, a carta da mediana total conseguir obter valores próximos de 0.0027 para distribuições com peso de caudas mais leves. De certa forma uma escolha segura é a utilização da carta da mediana total para informação proveniente da Normal ou de uma distribuição com um peso das caudas bastante baixo, não tão seguro quanto para dados provenientes da normal mas permissível. Quando o peso das caudas é superior a 1.6364 a carta da tri-média apresenta maior robustez do que as restantes cartas  $3\text{-}\sigma$ , portanto caso se considere escolher uma carta de controlo para informação proveniente de uma distribuição com caudas mais pesadas, a tri-média pode ser uma escolha aceitável. Quando queremos estimador o desvio padrão, já tínhamos verificado que as cartas  $3\text{-}\sigma$  dos estimadores de dispersão não são comparáveis apesar de serem mais robustas para distribuições de caudas mais leves. Também como não existe um valor teórico de  $\alpha$  torna-se mais complicado verificar a robustez. Sendo que o valor simulado de  $\alpha$  seria aproximadamente 0.0040. Segundo as taxas de falso alarme verifica-se que a carta  $3\text{-}\sigma$  do desvio absoluto da média possui as taxas de falso alarme mais próximas de 0.0040 para distribuições mais pesadas, o que a torna mais robusta para estes casos. Para distribuições mais leves a carta da amplitude total seria a mais indicada.

Para o caso de estarmos perante amostras de distribuições com domínios positivos, devemos aplicar as cartas de quantis baseadas em informação normal recorrentes à transformação Box-Cox, seja para a estimação do valor médio ou do desvio padrão. Constatou-se que apenas aplicando a standardização, com a construção de limites baseados nos quantis das estatísticas em informação proveniente da distribuição Normal, as cartas apresentavam valores relativamente afastados de  $\alpha$ . Em relação à estimação do valor médio, observámos que as cartas da mediana total e da tri-média com transformação Box-Cox eram ambas relativamente robustas, no entanto a carta da mediana total é mais potente, o que a torna a melhor escolha para a estimação do valor médio. Para a estimação do desvio padrão, verificámos que todas as cartas apresentavam baixa robustez, apesar de a carta do desvio absoluto da média apresentar melhores resultados. Assim, para a monitorização do desvio padrão em amostras de domínio positivo a carta aconselhada seria a carta do desvio absoluto da média. Outra alternativa são as cartas baseadas nos quantis da distribuição em análise. Estas cartas mostraram-se como sendo bastante robustas, independentemente do peso das caudas da distribuição em questão. Caso pretendamos aplicar



uma carta com um peso de caudas superior a 1.16 e inferior a 2.33, de modo a ser potente para detetar desde pequenas a grandes alterações, a carta  $q$  da mediana total é a ideal para uma dimensão de  $n=5$ . Para uma dimensão  $n=5$  e um peso das caudas superior a 2.33 e para deteção de grandes alterações a carta  $q$  da tri-média será a melhor para este caso.

Se considerarmos uma dimensão superior, as diferenças tornam-se menores entre as cartas de quantis, apesar de a carta da mediana total mostrar-se como a carta mais potente em grande parte dos casos, embora não hajam grandes diferenças em relação às restantes. Apesar de estes dados beneficiarem as cartas de quantis, num caso prático em que não se esteja a utilizar informação simulada, é necessário realizar testes às amostras e averiguar para qual distribuição existe maior evidência de estas pertencerem. Caso contrário as cartas de quantis podem ser mal executadas e fornecer taxas de falso alarme demasiado elevadas.

Considerando as cartas  $q$  dos estimadores de dispersão, verificámos que para distribuições mais leves a carta da amplitude total era a carta mais potente, enquanto que para distribuições mais pesadas a carta do desvio absoluto da média acaba por ser mais potente. As cartas de quantis apresentaram robustez apesar de umas ligeiras diferenças em relação ao valor  $\alpha$ . A melhor escolha, segundo os dados apresentados, seria considerar uma dimensão de  $n=10$  e para amostras provenientes da distribuição Normal recorria-se à carta da mediana total, se tivéssemos perante outra distribuição aplicava-se a carta do desvio absoluto da média. Outras abordagens que não estavam presentes nos respetivos artigos podiam ter sido também aplicadas. Para a transformação Box-Cox, em vez de se usar os quantis dos estimadores, recorrendo a informação proveniente da distribuição Normal podia-se ter utilizado as cartas cujos limites são os quantis dos estimadores em informação da distribuição em questão. Para informação das distribuições simétricas, que contêm tanto valores negativos e positivos, a aplicação de uma transformação que alterasse a localização de modo a só haver valores positivos seguida pela transformação Box-Cox e standardização podia ser outra opção a ter em mente.

## Bibliografia

- [1] Box, G. E., Cox, D. R. An analysis of transformations. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 211-252. 1964
- [2] Box, G. E. , Leonard, T. , Wu, C. *Scientific Inference, Data Analysis, and Robustness* The University of Wisconsin - Madison, Academic Press, 1983
- [3] Lehmann, E. L.; Casella, G. *Theory of Point Estimation, 2nd ed.* Springer, 1998
- [4] Figueiredo, F. *Controlo Estatístico da Qualidade e Métodos Robustos*. Tese Doutoramento, Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, 2003
- [5] Figueiredo, F. e Gomes, M.I. *The Total Median in Statistical Quality Control*. John Wiley Sons ,Ltd, 2004
- [6] Figueiredo, F. e Gomes, M.I. *Box-Cox Transformations and robust control charts in SPC*. Advanced Mathematical And Computational Tools In Metrology VII. 35-46. 2006.
- [7] Figueiredo, F. e Gomes, M.I. Monitoring Industrial processes with robust control charts *REVSTAT - Statistical Journal*, 2008
- [8] Figueiredo, F. e Gomes, M.I. The total median statistic to monitor contaminated normal data *Quality Technology Quantitative Management*, 13.1: 78-87. 2016
- [9] Gomes, M. I., Figueiredo, F. e M.I. Barão . *Controlo Estatístico da Qualidade* 2ªed. Edições S.P.E 2010
- [10] Jensen, W.A *et al.* *Effects of parameter estimation on control chart chart properties* A literature review, *J.Quality Technology*,38,349-364, 2006
- [11] Franklin *et al.* *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education* American Statistical Association, 2007
- [12] Martin, R., Zamar, H. *Bias Robust Estimation Of Scale* University of Washington Seattle, Washington 1991
- [13] Stadtler, H., Kilger C., Meyr H. *Supply Chain Management and Advanced Planning: Concepts, Models, Software, and Case Studies* Springer Texts in Business and Economics, 2014
- [14] Tukey, W. *Exploratory Data Analysis* Addison-Wesley Publishing Company, 1981

## Sites

Portal Action - Transformação Box-Cox

<http://www.portalaction.com.br/analise-de-capacidade/411-transformacao-de-box-cox> - Acesso em 25 Abril 2019

Package rmutl

<https://cran.r-project.org/web/packages/rmutl/rmutl.pdf> - Acesso em 25 Abril 2019

Package boxcox

<https://www.rdocumentation.org/packages/EnvStats/versions/2.3.1/topics/boxcox> - Acesso em 25 Abril 2019

Package PairedData

<https://cran.r-project.org/web/packages/PairedData/PairedData.pdf> - Acesso em 25 Abril 2019

Package TSA

<https://cran.r-project.org/web/packages/MASS/MASS.pdf> - Acesso em 25 Abril 2019

Package forecast

<https://cran.r-project.org/web/packages/forecast/forecast.pdf> - Acesso em 25 Abril 2019

## **Anexos**

Tabela A.1: Erro Médio Quadrático da Média para modelos assimétricos

Modelo	7	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
N(0,1)	1	0,3329	0,2507	0,1976	0,1685	0,1439	0,1247	0,1109	0,1	0,0899	0,0826	0,0773	0,071	0,0675	0,0623	0,0582	0,0557	0,0526	0,0498
t(15)	1,092	0,3833	0,2837	0,2328	0,1919	0,1663	0,144	0,1295	0,1158	0,1064	0,0962	0,0877	0,0827	0,0764	0,0727	0,0688	0,0649	0,0606	0,0581
t(10)	1,145	0,4139	0,3141	0,2512	0,2101	0,1782	0,1557	0,1396	0,125	0,1134	0,1045	0,0967	0,0899	0,0836	0,0783	0,0741	0,0694	0,0653	0,0628
t(9)	1,164	0,4319	0,3189	0,2567	0,208	0,1837	0,1598	0,1437	0,128	0,1161	0,1074	0,0991	0,0926	0,0859	0,0799	0,0758	0,072	0,0676	0,0636
t(8)	1,189	0,4408	0,326	0,2645	0,2218	0,1899	0,1668	0,149	0,1324	0,1204	0,112	0,1034	0,095	0,0888	0,0834	0,0778	0,0742	0,0701	0,068
Log(0,1)	1,213	1,091	0,8108	0,6605	0,5469	0,4786	0,4065	0,362	0,3319	0,2996	0,2769	0,2552	0,2364	0,2163	0,2053	0,1937	0,1815	0,1725	0,1647
t(6)	1,27	0,4952	0,3762	0,3002	0,2469	0,2126	0,1877	0,1676	0,1503	0,1369	0,1278	0,1155	0,1074	0,099	0,0949	0,088	0,0831	0,079	0,0756
C(0,3,2)	1,319	0,6459	0,4757	0,3807	0,3167	0,2704	0,2371	0,2112	0,191	0,1722	0,1568	0,1454	0,1364	0,1281	0,1188	0,1124	0,1058	0,0998	0,0966
t(4)	1,467	0,6658	0,4985	0,3931	0,3304	0,2813	0,2532	0,2241	0,2031	0,1826	0,1668	0,154	0,1407	0,1329	0,1252	0,1166	0,1108	0,1048	0,0992
Lp(0,1)	1,636	0,6709	0,4949	0,3974	0,3357	0,2901	0,2528	0,2217	0,2013	0,1836	0,1649	0,153	0,1429	0,1339	0,1248	0,1176	0,1114	0,1062	0,0997
t(3)	1,721	0,9426	0,724	0,6345	0,471	0,4319	0,3863	0,3214	0,2912	0,2661	0,2508	0,2355	0,2105	0,2101	0,1805	0,1759	0,1658	0,1592	0,1524
CN(0,3,3)	1,835	1,1233	0,846	0,6804	0,5691	0,4764	0,4255	0,3801	0,3416	0,3112	0,2798	0,2593	0,2468	0,2312	0,2132	0,1975	0,1891	0,1789	0,1705
CN(0,3,4)	2,331	1,8661	1,3874	1,1106	0,922	0,7808	0,6922	0,6076	0,5517	0,5056	0,4598	0,4149	0,3856	0,3675	0,35	0,3254	0,3093	0,2894	0,2765
CN(0,3,5)	2,853	2,7206	2,033	1,6395	1,3743	1,1703	1,0065	0,9121	0,8268	0,7408	0,688	0,6341	0,5815	0,5405	0,5127	0,4896	0,4505	0,4341	0,4069
CN(0,3,6)	3,344	3,7998	2,8456	2,2582	1,9288	1,6493	1,429	1,2863	1,1537	1,0574	0,9615	0,8887	0,8117	0,7679	0,7163	0,6717	0,6398	0,6086	0,571
CN(0,3,7)	3,847	5,1497	3,8961	3,0965	2,5613	2,1853	1,9272	1,6893	1,5531	1,3984	1,2986	1,1866	1,1029	1,0216	0,9622	0,9101	0,8633	0,8124	0,7697
CN(0,3,8)	4,336	6,5973	4,979	3,942	3,348	2,8666	2,497	2,2031	2,0028	1,8126	1,6259	1,5273	1,4076	1,3035	1,2533	1,1601	1,11	1,0474	0,9908
CN(0,3,9)	4,842	8,3658	6,244	5,0569	4,2111	3,6067	3,1297	2,7011	2,5005	2,2802	2,0663	1,9037	1,7857	1,6721	1,5653	1,491	1,4013	1,3224	1,2537
CN(0,3,10)	5,335	10,336	7,7021	5,9141	5,0239	4,3907	3,8029	3,4418	3,0682	2,8082	2,5454	2,3801	2,1719	2,0247	1,9304	1,7953	1,7159	1,6385	1,534
CN(0,3,11)	5,838	12,5464	9,233	7,3573	6,2418	5,265	4,6375	4,0848	3,702	3,3769	3,0651	2,8105	2,6653	2,4459	2,2991	2,164	2,0706	1,9635	1,8461
CN(0,3,12)	6,344	14,7174	10,6602	8,7557	7,2502	6,3127	5,5154	4,8364	4,3684	3,9853	3,6512	3,4051	3,1307	2,9216	2,8031	2,5794	2,4337	2,3094	2,1881
CN(0,3,13)	6,834	17,329	12,8423	10,4141	8,5773	7,3464	6,5008	5,7718	5,026	4,6729	4,3509	4,0359	3,696	3,4109	3,2161	3,0353	2,815	2,69	2,5938

Tabela A.2: Erro Médio Quadrático da Mediana Total modelos simétricos

Modelo	$\tau$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
N(0,1)	1	0,3374	0,2572	0,2128	0,1831	0,1619	0,1407	0,1282	0,1162	0,1063	0,0972	0,0931	0,0859	0,082	0,0763	0,0724	0,0691	0,0656	0,0628
t(15)	1,092	0,3833	0,2837	0,2368	0,1957	0,1747	0,152	0,139	0,124	0,1148	0,104	0,0971	0,0913	0,0859	0,0806	0,0779	0,0733	0,0687	0,0657
t(10)	1,145	0,4086	0,3085	0,2481	0,2081	0,1796	0,1564	0,1433	0,1293	0,1186	0,108	0,1018	0,0945	0,089	0,0829	0,0789	0,074	0,0705	0,068
t(9)	1,164	0,4254	0,3108	0,2515	0,2035	0,1813	0,1588	0,1436	0,129	0,1182	0,1098	0,102	0,0944	0,0892	0,0832	0,0798	0,0757	0,0719	0,0675
t(8)	1,189	0,4319	0,3154	0,2553	0,2141	0,1855	0,1605	0,1447	0,1298	0,12	0,1107	0,103	0,0962	0,0895	0,0837	0,08	0,0758	0,0722	0,0699
Log(0,1)	1,213	1,0693	0,7826	0,6381	0,5239	0,4598	0,3922	0,3502	0,3208	0,2955	0,2721	0,2539	0,2332	0,2147	0,2041	0,1956	0,1816	0,1751	0,164
t(6)	1,27	0,4765	0,3524	0,2765	0,2247	0,1945	0,1709	0,1538	0,1371	0,1265	0,1172	0,107	0,0989	0,092	0,0883	0,0822	0,0776	0,0751	0,0709
C(0,3,2)	1,319	0,6218	0,4477	0,3503	0,2885	0,2467	0,2178	0,1933	0,1733	0,1598	0,1452	0,1359	0,1262	0,1199	0,1106	0,1063	0,0989	0,0947	0,0908
t(4)	1,467	0,6128	0,4354	0,3173	0,2579	0,2173	0,1906	0,1693	0,1524	0,1385	0,125	0,1169	0,1073	0,1001	0,0942	0,0885	0,0839	0,0791	0,0759
Lp(0,1)	1,636	0,6214	0,4359	0,3211	0,2637	0,2184	0,1867	0,1578	0,1423	0,1264	0,1124	0,1025	0,0958	0,089	0,0819	0,0765	0,0719	0,0683	0,063
t(3)	1,721	0,8186	0,5661	0,3886	0,3033	0,2485	0,2156	0,1857	0,1633	0,1494	0,136	0,1255	0,1142	0,1094	0,101	0,0965	0,0897	0,085	0,0813
CN(0,3,3)	1,835	1,0178	0,7163	0,5152	0,411	0,328	0,2846	0,2484	0,2199	0,1984	0,1776	0,1626	0,1532	0,144	0,1305	0,1239	0,1163	0,1115	0,1059
CN(0,3,4)	2,331	1,6255	1,0927	0,7256	0,5642	0,4234	0,3641	0,2978	0,2665	0,2325	0,2101	0,1845	0,1713	0,1599	0,149	0,1389	0,1331	0,1225	0,1164
CN(0,3,5)	2,853	2,2969	1,5153	0,9585	0,7434	0,5344	0,4375	0,3636	0,3148	0,2573	0,24	0,2119	0,1893	0,1736	0,1629	0,1512	0,139	0,1316	0,1262
CN(0,3,6)	3,344	3,1428	2,0642	1,2145	0,943	0,6663	0,5379	0,4244	0,3648	0,3046	0,268	0,2326	0,2083	0,1881	0,1728	0,1599	0,1482	0,1388	0,1294
CN(0,3,7)	3,847	4,2135	2,7552	1,6188	1,1813	0,7953	0,6525	0,4856	0,4222	0,3413	0,299	0,2567	0,2316	0,2026	0,1862	0,1687	0,1575	0,1473	0,1385
CN(0,3,8)	4,336	5,3566	3,4656	1,9542	1,5002	0,9846	0,7809	0,5557	0,4767	0,3801	0,3259	0,2687	0,2479	0,2165	0,2034	0,1788	0,1654	0,1546	0,144
CN(0,3,9)	4,842	6,729	4,2904	2,4516	1,816	1,1648	0,8983	0,6232	0,5508	0,4218	0,3657	0,2997	0,2719	0,2304	0,2121	0,189	0,1741	0,1582	0,1492
CN(0,3,10)	5,335	8,2987	5,2255	2,7265	2,0738	1,3657	1,05	0,7645	0,6179	0,4667	0,405	0,3323	0,2882	0,2436	0,2246	0,1932	0,1823	0,1657	0,1553
CN(0,3,11)	5,838	10,0491	6,23	3,3846	2,5031	1,5528	1,2033	0,8515	0,706	0,5114	0,4354	0,3564	0,3097	0,261	0,2422	0,2023	0,1941	0,1739	0,1577
CN(0,3,12)	6,344	11,6727	7,0695	4,0207	2,8887	1,7935	1,4019	0,9571	0,7717	0,5697	0,4868	0,387	0,3377	0,2737	0,253	0,2187	0,2004	0,1748	0,16
CN(0,3,13)	6,834	13,7654	8,5501	4,6535	3,3167	2,0822	1,5995	1,0929	0,8621	0,6491	0,5461	0,4153	0,3581	0,2902	0,2617	0,2261	0,2038	0,1786	0,1747

Tabela A.3: Erro Médio Quadrático da Mediana para modelos simétricos

Modelo	$\tau$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
N(0,1)	1	0,4431	0,2981	0,2845	0,2177	0,2127	0,1691	0,1658	0,1393	0,1361	0,1161	0,117	0,1021	0,102	0,0903	0,0898	0,0815	0,0806	0,074
t(15)	1,092	0,4863	0,3204	0,3054	0,2267	0,2245	0,1789	0,1752	0,1459	0,1443	0,123	0,1207	0,1071	0,1057	0,094	0,0956	0,0851	0,0833	0,0763
t(10)	1,145	0,5038	0,3401	0,3155	0,2398	0,2294	0,1817	0,1812	0,1517	0,1487	0,1258	0,1257	0,1108	0,1088	0,097	0,0958	0,086	0,0852	0,0786
t(9)	1,164	0,5201	0,3395	0,3198	0,2332	0,2303	0,1846	0,1795	0,1502	0,1479	0,1276	0,1264	0,1098	0,1095	0,0969	0,0973	0,0875	0,0869	0,0781
t(8)	1,189	0,5252	0,3431	0,3238	0,2419	0,2337	0,1857	0,1809	0,1508	0,149	0,1281	0,1272	0,112	0,1093	0,0966	0,0973	0,0877	0,087	0,0805
Log(0,1)	1,213	1,2897	0,8451	0,8015	0,5908	0,5753	0,4501	0,4346	0,3683	0,364	0,3136	0,3109	0,2704	0,2619	0,2359	0,2368	0,2091	0,2115	0,1885
t(6)	1,27	0,5515	0,3669	0,3402	0,2496	0,2414	0,1945	0,19	0,1578	0,1549	0,1346	0,1307	0,1142	0,1118	0,1017	0,0994	0,0889	0,0906	0,0811
C(0,3,2)	1,319	0,7106	0,4689	0,4268	0,3198	0,3051	0,2481	0,2391	0,1986	0,1966	0,1677	0,1677	0,1457	0,1452	0,1285	0,1287	0,114	0,1139	0,1048
t(4)	1,467	0,6303	0,4189	0,3686	0,2732	0,2598	0,2088	0,2044	0,1714	0,1674	0,1416	0,1393	0,1217	0,1196	0,107	0,106	0,0951	0,0938	0,0867
Lp(0,1)	1,636	0,6448	0,4181	0,3443	0,2622	0,2395	0,1884	0,173	0,1458	0,138	0,1166	0,1117	0,0993	0,097	0,0847	0,0828	0,0745	0,0739	0,0658
t(3)	1,721	0,7185	0,472	0,4032	0,3003	0,2825	0,2286	0,2186	0,1796	0,1761	0,1512	0,1465	0,1272	0,129	0,113	0,1131	0,1009	0,1	0,0919
CN(0,3,3)	1,835	0,9955	0,6484	0,5466	0,4006	0,3673	0,293	0,2815	0,2361	0,2306	0,195	0,1906	0,169	0,1693	0,1459	0,1456	0,1305	0,1313	0,1198
CN(0,3,4)	2,331	1,3929	0,8845	0,6681	0,486	0,4173	0,3388	0,3123	0,2624	0,252	0,2164	0,2068	0,1816	0,1804	0,1608	0,1585	0,1459	0,1396	0,1286
CN(0,3,5)	2,853	1,7667	1,1155	0,7697	0,5666	0,467	0,3636	0,3454	0,2838	0,2611	0,2323	0,2228	0,1929	0,1896	0,1694	0,1671	0,1482	0,1482	0,1364
CN(0,3,6)	3,344	2,2744	1,4471	0,884	0,645	0,5206	0,4052	0,3679	0,3033	0,2867	0,2431	0,2339	0,2016	0,1987	0,1736	0,1727	0,1538	0,1516	0,1375
CN(0,3,7)	3,847	2,9382	1,8464	1,1067	0,7613	0,5618	0,4469	0,3842	0,3201	0,2999	0,2527	0,2432	0,2102	0,2019	0,1801	0,1764	0,1593	0,1575	0,144
CN(0,3,8)	4,336	3,6246	2,2502	1,2574	0,9143	0,6451	0,4912	0,4037	0,3358	0,3078	0,259	0,2424	0,215	0,2095	0,1884	0,1817	0,1621	0,1631	0,1453
CN(0,3,9)	4,842	4,3939	2,7383	1,4803	1,0615	0,6971	0,5302	0,4197	0,3601	0,318	0,271	0,2555	0,2244	0,2133	0,1872	0,1867	0,1651	0,1625	0,1476
CN(0,3,10)	5,335	5,4587	3,2471	1,5293	1,1499	0,7357	0,5749	0,4697	0,3805	0,3202	0,2846	0,2668	0,2268	0,2156	0,1933	0,185	0,1679	0,1669	0,1514
CN(0,3,11)	5,838	6,5726	3,8098	1,8841	1,3075	0,8316	0,617	0,4867	0,3989	0,3318	0,2801	0,2685	0,2291	0,2197	0,1984	0,1855	0,1724	0,1677	0,1508
CN(0,3,12)	6,344	7,3799	4,1962	2,2231	1,502	0,9064	0,6837	0,5141	0,4038	0,3395	0,2961	0,2674	0,2344	0,2188	0,197	0,1971	0,1743	0,1686	0,1508
CN(0,3,13)	6,834	8,7848	5,1415	2,5436	1,6373	1,0495	0,7533	0,5501	0,4435	0,369	0,3094	0,2749	0,2424	0,2247	0,1993	0,1935	0,1721	0,1665	0,1578

Tabela A.4: Erro Médio Quadrático da Tri-Média modelos simétricos

Modelo	$\tau$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
N(0,1)	1	0,3747	0,2772	0,231	0,1908	0,1672	0,1416	0,1312	0,1149	0,1051	0,0944	0,0918	0,0825	0,0788	0,0725	0,0695	0,0648	0,0621	0,0584
t(15)	1,092	0,4166	0,3002	0,2523	0,202	0,1795	0,1529	0,1421	0,1231	0,114	0,1016	0,0961	0,0883	0,083	0,0773	0,0754	0,0694	0,0652	0,062
t(10)	1,145	0,4358	0,3213	0,2621	0,2137	0,1843	0,1572	0,147	0,1285	0,1181	0,1055	0,1012	0,0919	0,0863	0,0797	0,077	0,0706	0,0675	0,0643
t(9)	1,164	0,4517	0,3217	0,2654	0,2088	0,186	0,1595	0,1469	0,1281	0,1174	0,1075	0,1019	0,0922	0,0874	0,0797	0,0779	0,0723	0,0688	0,064
t(8)	1,189	0,4561	0,3252	0,2685	0,219	0,1899	0,1611	0,1481	0,1291	0,1198	0,1089	0,103	0,0932	0,0875	0,0807	0,0784	0,0727	0,0693	0,0667
Log(0,1)	1,213	1,1259	0,8037	0,6695	0,5352	0,4706	0,3936	0,358	0,3194	0,296	0,2678	0,2544	0,2283	0,2112	0,1983	0,1926	0,1757	0,1698	0,1579
t(6)	1,27	0,4881	0,353	0,2864	0,2278	0,1984	0,1714	0,1575	0,1366	0,1258	0,1155	0,1074	0,0972	0,0907	0,0859	0,0811	0,0753	0,0728	0,0681
C(0,3,2)	1,319	0,6342	0,4503	0,3614	0,2919	0,2517	0,2184	0,198	0,1725	0,1598	0,1433	0,1364	0,1241	0,118	0,1074	0,1049	0,0955	0,092	0,087
t(4)	1,467	0,5824	0,4122	0,317	0,2552	0,2202	0,1904	0,1741	0,1526	0,1402	0,1246	0,1188	0,1065	0,0999	0,0929	0,0889	0,0827	0,0783	0,0741
Lp(0,1)	1,636	0,5954	0,4132	0,3139	0,2598	0,2188	0,1866	0,1634	0,146	0,1313	0,1166	0,11	0,1012	0,0953	0,0871	0,0833	0,0777	0,0737	0,0684
t(3)	1,721	0,7019	0,4843	0,3591	0,291	0,2485	0,2141	0,1911	0,1646	0,1521	0,1373	0,1295	0,1151	0,1111	0,1019	0,0991	0,0903	0,086	0,0813
CN(0,3,3)	1,835	0,939	0,6533	0,4944	0,3985	0,3308	0,2831	0,2552	0,2232	0,2044	0,1803	0,1688	0,1559	0,1482	0,1323	0,1279	0,1181	0,1135	0,1071
CN(0,3,4)	2,331	1,3867	0,9254	0,6507	0,5278	0,4199	0,3596	0,3091	0,2764	0,2483	0,222	0,2001	0,1829	0,1731	0,1596	0,1507	0,1424	0,1316	0,1235
CN(0,3,5)	2,853	1,8373	1,2059	0,81	0,6755	0,5237	0,4301	0,3812	0,3355	0,2865	0,2639	0,2408	0,2134	0,1987	0,1851	0,1738	0,158	0,1505	0,1423
CN(0,3,6)	3,344	2,4152	1,5911	0,9834	0,8346	0,6463	0,526	0,4505	0,4003	0,3527	0,3065	0,2767	0,2477	0,2294	0,2095	0,1963	0,1792	0,1707	0,1568
CN(0,3,7)	3,847	3,1644	2,061	1,284	1,0294	0,7636	0,6362	0,5272	0,4709	0,4106	0,3573	0,3237	0,2931	0,2653	0,2389	0,2225	0,2063	0,1931	0,1774
CN(0,3,8)	4,336	3,9527	2,5403	1,5083	1,2991	0,9365	0,76	0,6072	0,5493	0,4746	0,4044	0,3529	0,3315	0,3009	0,2796	0,2504	0,2327	0,2182	0,1996
CN(0,3,9)	4,842	4,8608	3,1035	1,8532	1,557	1,096	0,871	0,6865	0,6438	0,5432	0,4681	0,413	0,3861	0,3424	0,311	0,2826	0,2629	0,242	0,2235
CN(0,3,10)	5,335	5,9949	3,7161	2,0031	1,7567	1,2686	1,0186	0,8542	0,7387	0,6202	0,538	0,476	0,4254	0,3819	0,3452	0,3148	0,2942	0,2734	0,2493
CN(0,3,11)	5,838	7,2266	4,3902	2,4782	2,1005	1,4565	1,1642	0,9561	0,8539	0,7	0,5954	0,5391	0,4887	0,4296	0,3962	0,3515	0,3356	0,3102	0,2706
CN(0,3,12)	6,344	8,2138	4,8788	2,9441	2,4246	1,6599	1,357	1,101	0,9516	0,7894	0,6805	0,6115	0,5553	0,4863	0,4471	0,3977	0,3636	0,331	0,2958
CN(0,3,13)	6,834	9,7313	5,9431	3,371	2,7645	1,9385	1,5461	1,2598	1,0793	0,9176	0,794	0,6862	0,6133	0,539	0,472	0,4496	0,3982	0,3623	0,3451



Tabela A.5: Eficiência Relativa da Média para modelos simétricos

Modelo	$\tau$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
N(0,1)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
t(15)	1,092	0,9999	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
t(10)	1,145	0,9872	0,9821	0,9878	0,9906	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
t(9)	1,164	0,985	0,9744	0,9801	0,9781	0,9869	0,9937	0,9989	1	1	1	1	0,9955	1	0,997	1	1	1	1
t(8)	1,189	0,9798	0,9676	0,9653	0,9652	0,9769	0,9625	0,9716	0,9752	0,9947	0,9723	0,9958	0,9816	0,9855	0,9676	1	0,9795	0,9891	0,9817
Log(0,1)	1,213	0,9801	0,9652	0,966	0,9579	0,9607	0,9648	0,9673	0,9623	0,9861	0,9672	0,9949	0,9657	0,9764	0,9661	0,9943	0,9682	0,9844	0,9592
t(6)	1,27	0,9623	0,9367	0,9211	0,9101	0,9147	0,9108	0,9175	0,9086	0,9189	0,9037	0,926	0,9045	0,916	0,9051	0,9217	0,9061	0,9214	0,8998
C(0,3,2)	1,319	0,9627	0,9411	0,9202	0,9109	0,9124	0,9187	0,9153	0,9033	0,9276	0,9137	0,9347	0,9101	0,921	0,9036	0,9328	0,9025	0,9225	0,9009
t(4)	1,467	0,8747	0,8269	0,8062	0,7724	0,7722	0,7522	0,7553	0,7502	0,7587	0,7475	0,7596	0,7571	0,7521	0,7416	0,7594	0,7464	0,7474	0,7469
Lp(0,1)	1,636	0,8875	0,8348	0,7898	0,7741	0,7528	0,7383	0,7117	0,7072	0,6885	0,6817	0,6703	0,6704	0,6643	0,6561	0,6505	0,6447	0,6425	0,632
t(3)	1,721	0,7446	0,652	0,566	0,6178	0,5753	0,5543	0,5778	0,5609	0,5617	0,5424	0,533	0,5423	0,5206	0,5598	0,5487	0,5409	0,5339	0,5332
CN(0,3,3)	1,835	0,8359	0,7665	0,7266	0,7002	0,6886	0,6653	0,6534	0,6438	0,6376	0,6346	0,6273	0,6207	0,6226	0,6123	0,6273	0,6149	0,6231	0,6215
CN(0,3,4)	2,331	0,7431	0,6375	0,5859	0,5272	0,5344	0,4895	0,4901	0,4755	0,4598	0,457	0,4447	0,4442	0,435	0,4257	0,4268	0,4303	0,4233	0,4209
CN(0,3,5)	2,853	0,6494	0,5487	0,4694	0,4123	0,399	0,3613	0,3787	0,3432	0,3474	0,3376	0,3341	0,3256	0,3212	0,3177	0,3089	0,3085	0,3031	0,3101
CN(0,3,6)	3,344	0,5986	0,5085	0,3915	0,3344	0,3156	0,2836	0,286	0,2629	0,2711	0,2528	0,2617	0,2483	0,2449	0,2413	0,2381	0,2317	0,228	0,2266
CN(0,3,7)	3,847	0,5706	0,4739	0,3574	0,2972	0,2571	0,2319	0,2275	0,2061	0,2145	0,1946	0,205	0,1906	0,1977	0,1872	0,1854	0,1824	0,1813	0,1799
CN(0,3,8)	4,336	0,5494	0,4519	0,319	0,2731	0,2251	0,1967	0,1832	0,1677	0,1698	0,1593	0,1587	0,1527	0,1607	0,1504	0,1541	0,1461	0,1477	0,1453
CN(0,3,9)	4,842	0,5252	0,4385	0,2927	0,2521	0,1933	0,1694	0,1554	0,144	0,1395	0,1312	0,1342	0,1257	0,1276	0,1196	0,1252	0,1178	0,1197	0,1177
CN(0,3,10)	5,335	0,5281	0,4216	0,2586	0,2289	0,1676	0,1512	0,1365	0,124	0,114	0,1118	0,1121	0,1044	0,1065	0,1001	0,103	0,0979	0,1011	0,0987
CN(0,3,11)	5,838	0,5239	0,4126	0,2561	0,2095	0,1579	0,133	0,1192	0,1078	0,0983	0,0914	0,0955	0,086	0,0898	0,0863	0,0857	0,0833	0,0854	0,0817
CN(0,3,12)	6,344	0,5014	0,3936	0,2539	0,2072	0,1436	0,124	0,1063	0,0924	0,0852	0,0811	0,0785	0,0749	0,0749	0,0703	0,0764	0,0716	0,073	0,0689
CN(0,3,13)	6,834	0,5069	0,4004	0,2442	0,1932	0,1429	0,1159	0,0953	0,0882	0,079	0,0711	0,0681	0,0656	0,0659	0,062	0,0637	0,0611	0,0619	0,0609

Tabela A.6: Eficiência Relativa da Mediana Total para modelos simétricos

Modelo	$\tau$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
N(0,1)	1	0,9867	0,9747	0,9283	0,9203	0,8887	0,8865	0,8648	0,8604	0,8458	0,8498	0,8305	0,8273	0,8236	0,8166	0,8032	0,8062	0,8011	0,7919
t(15)	1,092	1	0,9999	0,9828	0,9804	0,9523	0,9476	0,931	0,9339	0,9269	0,9249	0,9035	0,9063	0,8899	0,9024	0,8834	0,8856	0,8826	0,8849
t(10)	1,145	1	1	1	1	0,9925	0,9956	0,9742	0,9664	0,9566	0,9679	0,9494	0,9509	0,9393	0,9447	0,9389	0,9372	0,9264	0,9233
t(9)	1,164	1	1	1	1	1	1	1	0,9921	0,982	0,9783	0,9722	0,9761	0,9629	0,9578	0,949	0,9508	0,9402	0,942
t(8)	1,189	1	1	1	1	1	1	1	0,9944	0,9979	0,9833	1	0,9697	0,9781	0,9641	0,9725	0,9589	0,9605	0,9545
Log(0,1)	1,213	1	1	1	1	1	1	1	0,9959	1	0,9839	1	0,9792	0,9833	0,9715	0,9846	0,9676	0,9696	0,9631
t(6)	1,27	1	1	1	1	1	1	1	0,9961	0,9943	0,9858	1	0,9824	0,9852	0,9729	0,9874	0,9703	0,9698	0,9604
C(0,3,2)	1,319	1	1	1	1	1	1	1	0,9952	1	0,9867	1	0,9836	0,9837	0,9703	0,9866	0,9653	0,9715	0,9587
t(4)	1,467	0,9504	0,9467	0,9989	0,9893	1	0,9991	1	1	1	0,9972	1	0,9929	0,9981	0,9859	1	0,9854	0,9902	0,9772
Lp(0,1)	1,636	0,9581	0,9478	0,9777	0,9852	1	0,9995	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
t(3)	1,721	0,8574	0,8339	0,924	0,9592	1	0,9933	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
CN(0,3,3)	1,835	0,9225	0,9053	0,9596	0,9698	1	0,9945	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
CN(0,3,4)	2,331	0,8531	0,8094	0,8968	0,8614	0,9856	0,9305	1	0,9846	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
CN(0,3,5)	2,853	0,7692	0,7362	0,803	0,7622	0,8739	0,8312	0,9497	0,9015	1	0,9678	1	1	1	1	1	1	1	1
CN(0,3,6)	3,344	0,7237	0,7011	0,7279	0,6841	0,7814	0,7533	0,8668	0,8314	0,9412	0,9071	1	0,9678	1	1	1	1	1	1
CN(0,3,7)	3,847	0,6973	0,6701	0,6837	0,6444	0,7064	0,6849	0,7912	0,7582	0,8788	0,8452	0,9476	0,9077	0,9969	0,9674	1	1	1	1
CN(0,3,8)	4,336	0,6767	0,6493	0,6434	0,6095	0,6553	0,629	0,7264	0,7045	0,8096	0,7946	0,9021	0,867	0,9678	0,9264	1	0,9804	1	1
CN(0,3,9)	4,842	0,653	0,6382	0,6038	0,5846	0,5985	0,5902	0,6734	0,6537	0,7539	0,7411	0,8526	0,8256	0,9259	0,8825	0,988	0,9483	1	0,9895
CN(0,3,10)	5,335	0,6578	0,6214	0,5609	0,5545	0,5387	0,5475	0,6144	0,6158	0,686	0,7028	0,8031	0,7868	0,8849	0,8605	0,9572	0,9213	1	0,9752
CN(0,3,11)	5,838	0,654	0,6115	0,5567	0,5223	0,5355	0,5128	0,5717	0,5651	0,6489	0,6432	0,7532	0,7397	0,8417	0,819	0,9169	0,8884	0,9643	0,9559
CN(0,3,12)	6,344	0,6322	0,5936	0,5529	0,5199	0,5054	0,4877	0,5372	0,5233	0,596	0,6083	0,691	0,6941	0,7995	0,7787	0,9016	0,8698	0,9643	0,9421
CN(0,3,13)	6,834	0,6382	0,6013	0,5466	0,4997	0,504	0,471	0,5033	0,5145	0,5684	0,5666	0,662	0,6771	0,774	0,7616	0,8556	0,8444	0,9325	0,9035

Tabela A.7: Eficiência Relativa da Mediana para modelos simétricos

Modelo	$\tau$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
N(0,1)	1	0,7514	0,841	0,6945	0,7742	0,6767	0,7373	0,6688	0,718	0,6606	0,7117	0,6608	0,6958	0,6626	0,6902	0,6475	0,6842	0,6523	0,6725
t(15)	1,092	0,7881	0,8853	0,7621	0,8464	0,741	0,8049	0,7388	0,7943	0,7373	0,7824	0,7265	0,7726	0,7231	0,7732	0,7194	0,7626	0,7281	0,7618
t(10)	1,145	0,811	0,9072	0,7863	0,8678	0,7769	0,8571	0,7704	0,8243	0,7626	0,8306	0,7692	0,8115	0,7677	0,8074	0,7736	0,8069	0,7663	0,7985
t(9)	1,164	0,818	0,9154	0,7866	0,8727	0,7873	0,8604	0,7999	0,8519	0,7852	0,8416	0,7845	0,8392	0,7839	0,8226	0,779	0,8226	0,7782	0,8136
t(8)	1,189	0,8225	0,9193	0,7885	0,885	0,7937	0,8646	0,8003	0,856	0,8037	0,8502	0,8096	0,8328	0,8003	0,8347	0,7995	0,8285	0,7964	0,8288
Log(0,1)	1,213	0,8291	0,926	0,7961	0,8868	0,7992	0,8712	0,8057	0,8674	0,8117	0,8539	0,8165	0,8442	0,8061	0,8407	0,8134	0,8405	0,8026	0,8381
t(6)	1,27	0,8641	0,9604	0,8129	0,9002	0,8057	0,8788	0,8094	0,8656	0,8122	0,8584	0,8182	0,8512	0,8107	0,8445	0,8166	0,8474	0,8034	0,8389
C(0,3,2)	1,319	0,8751	0,9547	0,8209	0,9022	0,8085	0,8781	0,8086	0,8684	0,8127	0,8544	0,8105	0,8519	0,8126	0,8354	0,8148	0,8373	0,8082	0,8304
t(4)	1,467	0,924	0,984	0,8599	0,934	0,8363	0,912	0,8281	0,8891	0,8276	0,8801	0,8393	0,8748	0,8356	0,868	0,8351	0,8693	0,8355	0,855
Lp(0,1)	1,636	0,9233	0,9882	0,9116	0,9909	0,912	0,9908	0,9121	0,9762	0,9164	0,9637	0,9179	0,9646	0,9175	0,967	0,9235	0,9647	0,9241	0,9584
t(3)	1,721	0,977	1	0,8907	0,9688	0,8797	0,9368	0,8494	0,9096	0,8484	0,8998	0,8564	0,8977	0,848	0,8942	0,8532	0,8887	0,8503	0,8838
CN(0,3,3)	1,835	0,9432	1	0,9046	0,9949	0,8931	0,9662	0,8823	0,9312	0,8604	0,9106	0,8533	0,9067	0,8506	0,8946	0,8507	0,8911	0,8488	0,8846
CN(0,3,4)	2,331	0,9955	1	0,9739	1	1	1	0,9537	1	0,9226	0,9711	0,8921	0,9431	0,8861	0,9268	0,8762	0,9123	0,8774	0,905
CN(0,3,5)	2,853	1	1	1	1	1	1	1	1	0,9854	1	0,9509	0,9813	0,9155	0,9615	0,905	0,9379	0,8878	0,9248
CN(0,3,6)	3,344	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,9945	1	0,9465	0,9957	0,9261	0,9641	0,9155	0,9408
CN(0,3,7)	3,847	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,9564	0,9883	0,9351	0,9619
CN(0,3,8)	4,336	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,9388	1	0,9481	0,9905
CN(0,3,9)	4,842	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,9738	1
CN(0,3,10)	5,335	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,9925	1
CN(0,3,11)	5,838	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
CN(0,3,12)	6,344	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
CN(0,3,13)	6,834	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Tabela A.8: Eficiência Relativa da Tri-Média para modelos simétricos

Modelo	$\tau$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
N(0,1)	1	0,8886	0,9043	0,8552	0,883	0,8607	0,8803	0,8453	0,8702	0,8552	0,8754	0,8419	0,8609	0,8576	0,8592	0,8373	0,8604	0,8469	0,8514
t(15)	1,092	0,92	0,9449	0,9227	0,9499	0,9264	0,9422	0,9108	0,9409	0,9331	0,9468	0,9123	0,9374	0,9204	0,9403	0,9117	0,9346	0,9294	0,9372
t(10)	1,145	0,9375	0,9602	0,9465	0,9739	0,967	0,9907	0,9497	0,973	0,9606	0,9904	0,9559	0,9778	0,9685	0,983	0,9629	0,9824	0,9675	0,9756
t(9)	1,164	0,9419	0,9661	0,9478	0,9743	0,9748	0,9955	0,9776	0,9992	0,9888	0,9988	0,9728	1	0,9829	1	0,9724	0,9957	0,9829	0,9931
t(8)	1,189	0,9471	0,9698	0,951	0,9775	0,9769	0,9964	0,9771	1	1	1	1	1	1	1	0,992	1	1	1
Log(0,1)	1,213	0,9497	0,9738	0,9531	0,9789	0,9771	0,9962	0,9781	1	0,9983	1	0,9981	1	1	1	1	1	1	1
t(6)	1,27	0,9763	0,9983	0,9656	0,9865	0,9803	0,9973	0,9766	1	1	1	0,996	1	1	1	1	1	1	1
C(0,3,2)	1,319	0,9805	0,9943	0,9695	0,9883	0,98	0,9976	0,9762	1	0,9996	1	0,9963	1	1	1	1	1	1	1
t(4)	1,467	1	1	1	1	0,9866	1	0,9722	0,9986	0,9879	1	0,9841	1	1	1	0,996	1	1	1
Lp(0,1)	1,636	1	1	1	1	0,9982	1	0,9655	0,9752	0,9632	0,964	0,9319	0,9466	0,9334	0,9403	0,9175	0,9245	0,926	0,9221
t(3)	1,721	1	0,9748	1	1	0,9998	1	0,9713	0,9926	0,9825	0,991	0,969	0,9923	0,9847	0,9917	0,9739	0,9925	0,9878	0,9999
CN(0,3,3)	1,835	1	0,9925	1	1	0,9916	1	0,9731	0,9851	0,9707	0,9851	0,9635	0,9828	0,9714	0,9863	0,9687	0,9843	0,9823	0,9894
CN(0,3,4)	2,331	1	0,9558	1	0,9208	0,9939	0,9423	0,9635	0,9493	0,9363	0,9464	0,9221	0,9366	0,9232	0,9334	0,9215	0,9345	0,9307	0,9419
CN(0,3,5)	2,853	0,9616	0,925	0,9502	0,8388	0,8918	0,8456	0,9059	0,8457	0,8981	0,8802	0,88	0,8872	0,8735	0,8798	0,8703	0,8795	0,8743	0,8866
CN(0,3,6)	3,344	0,9417	0,9095	0,8989	0,7728	0,8054	0,7703	0,8167	0,7576	0,8128	0,7933	0,8406	0,8137	0,8199	0,825	0,8147	0,8271	0,8127	0,8254
CN(0,3,7)	3,847	0,9285	0,8959	0,862	0,7395	0,7357	0,7025	0,7289	0,6798	0,7305	0,7073	0,7513	0,7172	0,7611	0,7539	0,7583	0,7633	0,7629	0,781
CN(0,3,8)	4,336	0,917	0,8858	0,8336	0,7039	0,6889	0,6464	0,6647	0,6114	0,6484	0,6403	0,6868	0,6484	0,6962	0,674	0,7139	0,6967	0,7086	0,7211
CN(0,3,9)	4,842	0,904	0,8823	0,7988	0,6818	0,636	0,6087	0,6113	0,5593	0,5855	0,5789	0,6187	0,5813	0,6229	0,6019	0,6606	0,6278	0,6539	0,6603
CN(0,3,10)	5,335	0,9106	0,8738	0,7635	0,6546	0,5799	0,5644	0,5498	0,5151	0,5162	0,5291	0,5606	0,5331	0,5645	0,5599	0,5876	0,5708	0,6058	0,6075
CN(0,3,11)	5,838	0,9095	0,8678	0,7603	0,6224	0,571	0,53	0,5091	0,4672	0,474	0,4703	0,498	0,4688	0,5113	0,5007	0,5276	0,5138	0,5406	0,5572
CN(0,3,12)	6,344	0,8985	0,8601	0,7551	0,6195	0,546	0,5038	0,467	0,4244	0,4301	0,4351	0,4373	0,4222	0,4499	0,4407	0,4957	0,4793	0,5094	0,5097
CN(0,3,13)	6,834	0,9027	0,8651	0,7545	0,5995	0,5414	0,4873	0,4367	0,411	0,4021	0,3897	0,4006	0,3953	0,4168	0,4223	0,4303	0,4322	0,4596	0,4574

Tabela A.9: Erro Médio Quadrático da Média para modelos assimétricos

Modelo	$\tau$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\chi^2(20)$	1.0018	13.2059	10.0227	8.0151	6.6388	5.7824	5.0184	4.4307	3.9425	3.6182	3.3708	3.0665	2.8532	2.6737	2.5159	2.3231	2.2052	2.1065	1.9818
$\chi^2(15)$	1.0026	9.9826	7.531	5.9781	5.0445	4.3458	3.752	3.3194	3.0165	2.7591	2.5083	2.3236	2.1479	2.014	1.8991	1.7786	1.6626	1.587	1.4993
$\chi^2(10)$	1.0044	6.5851	4.9708	3.9658	3.3098	2.8722	2.4956	2.2228	1.9723	1.8291	1.6533	1.5588	1.4277	1.3262	1.2441	1.1914	1.1151	1.0525	0.9896
$\chi^2(9)$	1.0051	6.107	4.4591	3.6107	3.0163	2.5627	2.2631	2.0141	1.8094	1.634	1.4914	1.3874	1.2537	1.1938	1.1215	1.078	1.0026	0.9498	0.9105
$\chi^2(5)$	1.0126	3.3731	2.4997	2.0117	1.6668	1.444	1.2519	1.1281	1.0135	0.9123	0.8274	0.7707	0.7159	0.6673	0.6288	0.5945	0.5556	0.5237	0.5039
$\chi^2(4)$	1.0182	2.7169	1.998	1.5931	1.3322	1.1593	0.9942	0.8832	0.8004	0.7287	0.6704	0.6226	0.5679	0.5395	0.5006	0.4789	0.4521	0.4208	0.3999
G(1)	1.0624	0.3288	0.2468	0.1982	0.1663	0.1443	0.125	0.1108	0.0994	0.0904	0.0839	0.0767	0.0713	0.0665	0.0618	0.0596	0.0554	0.0516	0.0506
G(0.75)	1.1055	0.2512	0.1856	0.1503	0.1249	0.1083	0.0934	0.0818	0.0763	0.068	0.0622	0.0574	0.0531	0.0499	0.0469	0.0441	0.0415	0.0393	0.0371
$\chi^2(1)$	1.2183	0.6695	0.5086	0.4014	0.3348	0.2879	0.2505	0.219	0.202	0.1814	0.1663	0.1527	0.1397	0.1344	0.1247	0.1163	0.1124	0.1069	0.0999
W(0.75)	1.3052	0.8847	0.6474	0.5163	0.4329	0.3673	0.3258	0.2871	0.2582	0.2355	0.2174	0.2	0.186	0.176	0.1628	0.1515	0.1425	0.1349	0.1291
LN(0.8)	1.3942	0.5596	0.4098	0.3482	0.2862	0.2406	0.2074	0.1846	0.1672	0.1561	0.1392	0.1316	0.1198	0.1113	0.1084	0.1007	0.0943	0.089	0.0831
LN(0.9)	1.5146	0.9305	0.6765	0.5478	0.4681	0.3994	0.3608	0.3113	0.2911	0.2562	0.2366	0.218	0.1959	0.1898	0.174	0.164	0.1553	0.1501	0.1391
LN(1)	1.6576	1.5019	1.1773	0.9305	0.7793	0.6495	0.5932	0.5451	0.4685	0.4269	0.3842	0.3538	0.3264	0.3118	0.2855	0.2856	0.266	0.2513	0.2396
LN(1.1)	1.8266	2.6828	1.96	1.6714	1.303	1.1187	1.0087	0.883	0.7808	0.692	0.6442	0.6059	0.5644	0.5233	0.476	0.459	0.4304	0.4042	0.3978
LN(1.2)	2.0254	4.1468	3.2701	2.9411	2.2559	1.8899	1.6494	1.5421	1.3258	1.2653	1.1141	1.0461	0.9745	0.8868	0.8429	0.7608	0.7265	0.6924	0.7017
W(0.5)	2.2598	6.5697	5.1132	4.0779	3.2537	2.951	2.507	2.1404	2.0369	1.8395	1.6965	1.5203	1.404	1.3605	1.2539	1.2	1.0911	1.0405	1.0221
LN(1.4)	2.5322	12.8057	9.6083	8.4736	7.6631	6.5331	5.4723	4.7712	4.0747	3.9557	3.32	3.2971	3.2526	2.8697	2.8323	2.5249	2.2146	2.2246	2.4233
LN(1.5)	2.8521	34.2623	19.3664	14.6537	14.0772	11.3076	10.0151	8.2004	8.0089	6.7864	6.2234	6.7761	5.8459	5.1045	6.7091	4.4552	4.3329	4.212	3.859
LN(1.6)	3.2262	65.3049	35.7867	30.5223	23.1578	23.2997	20.7145	16.6559	15.6598	13.0037	12.489	10.9328	11.1831	10.0951	11.621	10.8191	7.4136	7.143	7.6233
LN(1.7)	3.6635	90.0114	85.7684	115.2285	49.3991	47.1358	35.0196	52.0778	32.0196	39.9058	29.1031	19.3726	21.445	19.3501	17.1166	19.7465	15.2371	14.9901	13.3934
LN(2)	5.4707	837.6249	983.5591	330.6619	482.7451	463.3396	206.3199	256.2072	196.5012	197.8918	254.2038	358.6222	162.4813	190.8973	152.7618	168.7525	132.275	114.0081	342.0303
LN(2.2)	7.2432	2387.66	1658.887	2347.228	1590.347	2591.396	1747.778	1418.361	866.1883	772.9592	818.8907	1090.578	700.5124	724.4438	523.1351	558.0485	717.228	467.2838	499.2918

Tabela A.10: Erro Médio Quadrático da Mediana Total modelos assimétricos

Modelo	7	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\chi^2(20)$	1,0018	13,3444	10,2045	8,516	7,1275	6,459	5,66	5,1969	4,647	4,3873	4,0632	3,8438	3,5794	3,4635	3,2449	3,0668	2,9377	2,8722	2,7078
$\chi^2(15)$	1,0026	10,0534	7,6263	6,3922	5,3826	4,8534	4,2489	3,8779	3,5703	3,3612	3,1045	2,9426	2,7569	2,6142	2,5281	2,3694	2,279	2,1839	2,1261
$\chi^2(10)$	1,0044	6,6058	4,9956	4,1757	3,5198	3,195	2,8241	2,6033	2,3772	2,2535	2,0931	2,0019	1,8859	1,7983	1,7001	1,6563	1,5702	1,5293	1,4693
$\chi^2(9)$	1,0051	6,092	4,4894	3,775	3,1809	2,8537	2,5408	2,3592	2,1563	2,03	1,8878	1,8063	1,6585	1,6204	1,548	1,5156	1,436	1,4037	1,3546
$\chi^2(5)$	1,0126	3,3528	2,4721	2,0638	1,7362	1,588	1,4071	1,3312	1,2295	1,1653	1,0841	1,0572	1,0038	0,9783	0,9424	0,9142	0,8769	0,8639	0,8429
$\chi^2(4)$	1,0182	2,665	1,9525	1,6103	1,3689	1,2668	1,124	1,0563	0,9736	0,9472	0,8908	0,8656	0,8235	0,8145	0,773	0,7629	0,7446	0,7329	0,7174
G(1)	1,0624	0,3141	0,2298	0,1884	0,163	0,1531	0,1383	0,1354	0,1268	0,1249	0,1188	0,119	0,1154	0,1142	0,1122	0,1126	0,111	0,1091	0,1094
G(0.75)	1,1055	0,234	0,1676	0,1374	0,1186	0,1111	0,1025	0,1006	0,097	0,0968	0,0923	0,0925	0,0902	0,0915	0,0902	0,0909	0,0894	0,0896	0,0889
$\chi^2(1)$	1,2183	0,6011	0,4328	0,3381	0,2881	0,2781	0,2592	0,2613	0,2551	0,2577	0,2511	0,2583	0,2553	0,2603	0,2587	0,2609	0,2597	0,2614	0,2613
W(0.75)	1,3052	0,7827	0,538	0,4161	0,3548	0,3364	0,3148	0,3146	0,302	0,3067	0,2964	0,3061	0,2991	0,3044	0,3033	0,304	0,305	0,3078	0,3067
LN(0.8)	1,3942	0,4911	0,3368	0,2587	0,2158	0,1981	0,1792	0,1762	0,1668	0,1678	0,1583	0,16	0,1573	0,1567	0,1553	0,1544	0,1513	0,1523	0,1511
LN(0.9)	1,5146	0,7872	0,5253	0,3756	0,3143	0,2949	0,2742	0,2692	0,2571	0,263	0,2519	0,2551	0,2496	0,2509	0,2482	0,2501	0,2468	0,2504	0,2461
LN(1)	1,6576	1,2337	0,847	0,5586	0,4769	0,4358	0,4122	0,4088	0,3955	0,4023	0,3882	0,3924	0,3901	0,3977	0,3897	0,3978	0,3953	0,3991	0,3941
LN(1.1)	1,8266	2,1025	1,3199	0,8622	0,7175	0,653	0,6192	0,6206	0,6044	0,6156	0,6057	0,6147	0,6074	0,6241	0,6195	0,6261	0,6269	0,6319	0,6253
LN(1.2)	2,0254	3,1777	2,0969	1,2989	1,0631	0,9821	0,9306	0,9454	0,9137	0,9507	0,9338	0,9561	0,9456	0,9718	0,9588	0,9807	0,9789	0,9938	0,9875
W(0.5)	2,2598	5,1003	3,3096	2,0484	1,7107	1,6871	1,6159	1,6759	1,6513	1,7272	1,7239	1,7875	1,7895	1,8185	1,8388	1,8735	1,8839	1,914	1,9157
LN(1.4)	2,5322	9,2416	5,4252	3,0383	2,455	2,1985	2,1125	2,1951	2,1447	2,2236	2,2106	2,278	2,2795	2,3226	2,3308	2,3729	2,3847	2,4159	2,4136
LN(1.5)	2,8521	22,9056	10,1098	4,6641	3,8107	3,3504	3,229	3,3275	3,313	3,4434	3,4382	3,539	3,538	3,6199	3,6414	3,7046	3,7021	3,7516	3,762
LN(1.6)	3,2262	42,7436	17,7047	7,4992	5,7717	5,1723	4,9274	5,1562	5,1318	5,3395	5,3498	5,497	5,5488	5,652	5,6909	5,7751	5,7988	5,8597	5,8743
LN(1.7)	3,6635	59,2889	39,0455	17,0212	9,3337	7,889	7,6717	7,9861	7,9496	8,3412	8,3549	8,6249	8,668	8,8788	8,8851	9,0519	9,0702	9,2048	9,2112
LN(2)	5,4707	532,5908	405,0099	58,291	49,7853	32,064	30,3527	31,774	32,1188	33,2913	33,3615	34,4242	34,6279	35,4412	35,4477	36,0702	36,1577	36,6668	36,6102
LN(2.2)	7,2432	1485,174	702,336	268,8099	151,7656	91,0655	83,6632	84,1566	84,7982	88,2203	88,9427	91,0775	91,3581	93,1311	93,5849	94,7001	95,0405	96,0746	96,2038

Tabela A.11: Erro Médio Quadrático da Mediana para modelos assimétricos

Modelo	7	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\chi^2(20)$	1,0018	17,6095	11,864	11,4061	8,5306	8,5315	6,8189	6,7575	5,5726	5,6105	4,8656	4,8919	4,2711	4,3386	3,8557	3,7836	3,4567	3,5002	3,1852
$\chi^2(15)$	1,0026	13,1924	8,8296	8,5913	6,4565	6,3967	5,1413	5,0619	4,2898	4,2992	3,7246	3,6975	3,3011	3,2723	3,0072	2,9261	2,6938	2,6737	2,5073
$\chi^2(10)$	1,0044	8,6455	5,7693	5,6361	4,2682	4,2304	3,4358	3,4016	2,8943	2,8898	2,5262	2,5373	2,2616	2,2528	2,0247	2,035	1,8517	1,8605	1,7242
$\chi^2(9)$	1,0051	7,8654	5,2126	5,0606	3,833	3,7774	3,0856	3,0788	2,6265	2,623	2,2765	2,2748	1,9916	2,0272	1,8505	1,8655	1,6946	1,7189	1,5884
$\chi^2(5)$	1,0126	4,3514	2,8686	2,7753	2,1254	2,1211	1,741	1,7493	1,5153	1,5051	1,323	1,345	1,2149	1,2228	1,1268	1,121	1,0387	1,0469	0,9897
$\chi^2(4)$	1,0182	3,3568	2,2593	2,1822	1,6845	1,7047	1,3972	1,3987	1,2051	1,2264	1,0905	1,0995	1,0026	1,0206	0,9312	0,9368	0,8856	0,8882	0,8467
G(1)	1,0624	0,3886	0,262	0,2596	0,205	0,211	0,1775	0,182	0,1608	0,1638	0,1481	0,1524	0,142	0,1432	0,1363	0,138	0,1325	0,1322	0,1293
G(0.75)	1,1055	0,2794	0,1881	0,1872	0,151	0,154	0,1338	0,1369	0,1244	0,1272	0,1163	0,1119	0,1124	0,1145	0,1095	0,1115	0,1071	0,1079	0,1048
$\chi^2(1)$	1,2183	0,6738	0,4711	0,4614	0,3749	0,3919	0,3447	0,3581	0,3332	0,3424	0,3204	0,3315	0,3186	0,3253	0,3163	0,319	0,3108	0,3147	0,309
W(0.75)	1,3052	0,8355	0,5675	0,5548	0,4514	0,4632	0,4108	0,4236	0,3902	0,3992	0,3734	0,3868	0,3683	0,3745	0,366	0,3674	0,3615	0,3661	0,3587
LN(0.8)	1,3942	0,4919	0,3379	0,3269	0,2576	0,2616	0,2244	0,2296	0,2069	0,2129	0,1935	0,198	0,1889	0,1896	0,1831	0,1842	0,1761	0,1783	0,1743
LN(0.9)	1,5146	0,7255	0,5035	0,466	0,378	0,3878	0,3425	0,3488	0,3188	0,3303	0,307	0,3144	0,2986	0,3013	0,2929	0,2959	0,2865	0,2913	0,2823
LN(1)	1,6576	1,054	0,7361	0,6826	0,569	0,5778	0,5177	0,5289	0,4934	0,5037	0,4728	0,4802	0,4662	0,4764	0,4572	0,4683	0,4568	0,4625	0,4503
LN(1.1)	1,8266	1,5356	1,0703	1,0052	0,8466	0,8614	0,7815	0,801	0,7516	0,7666	0,7343	0,7479	0,723	0,7401	0,7225	0,7297	0,7211	0,7256	0,7085
LN(1.2)	2,0254	2,1544	1,5857	1,469	1,251	1,2768	1,1773	1,2081	1,1361	1,1737	1,129	1,1522	1,1175	1,145	1,111	1,1355	1,1164	1,1327	1,1124
W(0.5)	2,2598	3,7708	2,6346	2,4777	2,1347	2,2465	2,102	2,1871	2,0961	2,1701	2,1203	2,1742	2,1359	2,1566	2,1511	2,1708	2,1609	2,1886	2,1718
LN(1.4)	2,5322	4,8989	3,3496	3,1807	2,7387	2,8286	2,6718	2,7688	2,6501	2,711	2,6394	2,7035	2,6592	2,6883	2,6646	2,6913	2,6879	2,7092	2,6802
LN(1.5)	2,8521	6,8739	5,0238	4,6797	4,1221	4,2876	4,0487	4,1751	4,0466	4,1672	4,0769	4,1585	4,0892	4,1512	4,1271	4,1782	4,1379	4,1715	4,1506
LN(1.6)	3,2262	10,679	7,443	6,9391	6,1922	6,4761	6,1625	6,4084	6,232	6,3899	6,2912	6,3843	6,3563	6,4297	6,3982	6,4596	6,4203	6,4697	6,4362
LN(1.7)	3,6635	16,0175	11,0409	10,3122	9,5394	9,8713	9,5224	9,8428	9,5995	9,8779	9,7413	9,918	9,8619	9,9845	9,9117	10,0295	9,9949	10,078	10,0267
LN(2)	5,4707	75,0235	41,6708	38,3503	36,1605	37,497	36,6764	37,8183	37,5674	38,2053	37,7799	38,451	38,2743	38,8155	38,6107	38,9672	38,8725	39,2098	39,0463
LN(2.2)	7,2432	131,0067	116,0794	97,8116	93,5757	97,1247	95,6717	97,9259	97,3202	98,8426	98,6419	99,6867	99,254	100,2571	100,214	100,822	100,7373	101,4221	101,2007

Tabela A.12: Erro Médio Quadrático da Tri-Média modelos assimétricos

Modelo	$\tau$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\chi^2(20)$	1.0018	14.819	10.9968	9.2662	7.4547	6.6729	5.7098	5.3116	4.5907	4.3023	3.9164	3.7585	3.391	3.2716	3.0312	2.9026	2.708	2.6341	2.4586
$\chi^2(15)$	1.0026	11.1176	8.1916	6.9862	5.6284	5.0053	4.2898	3.9624	3.5224	3.2974	2.991	2.8559	2.6109	2.4703	2.347	2.2251	2.0893	2.0039	1.9191
$\chi^2(10)$	1.0044	7.2801	5.3499	4.5648	3.6929	3.3024	2.8539	2.6605	2.3393	2.2081	2.0058	1.9452	1.7759	1.68	1.5673	1.5457	1.426	1.3826	1.3084
$\chi^2(9)$	1.0051	6.6557	4.8224	4.1164	3.3379	2.9486	2.5685	2.4155	2.1274	1.987	1.8069	1.7456	1.5594	1.5081	1.4241	1.4081	1.2999	1.2658	1.2026
$\chi^2(5)$	1.0126	3.6622	2.6436	2.2657	1.8338	1.6449	1.4261	1.3606	1.21	1.128	1.0305	1.0113	0.9315	0.8961	0.8525	0.8311	0.7742	0.7551	0.7315
$\chi^2(4)$	1.0182	2.8537	2.0792	1.7702	1.4509	1.3143	1.1411	1.0816	0.9584	0.9149	0.8455	0.8258	0.76	0.7407	0.6936	0.6856	0.6525	0.6339	0.6135
$G(1)$	1.0624	0.3283	0.24	0.2098	0.175	0.1596	0.1413	0.1385	0.1243	0.1186	0.111	0.1103	0.104	0.1007	0.0973	0.0975	0.0937	0.0903	0.0897
$G(0.75)$	1.1055	0.237	0.1723	0.1529	0.1281	0.1162	0.1051	0.1029	0.0949	0.0915	0.0854	0.0852	0.0801	0.0794	0.0771	0.0773	0.074	0.0728	0.0716
$\chi^2(1)$	1.2183	0.5781	0.4311	0.3779	0.3145	0.2916	0.2669	0.2678	0.2495	0.241	0.2302	0.2353	0.2239	0.222	0.2171	0.218	0.2112	0.2089	0.2068
$W(0.75)$	1.3052	0.7304	0.524	0.4582	0.3845	0.3509	0.3238	0.3224	0.296	0.2879	0.2738	0.2807	0.2655	0.2633	0.2582	0.2575	0.2524	0.2497	0.2468
$LN(0.8)$	1.3942	0.4448	0.319	0.2743	0.2273	0.2059	0.1834	0.1807	0.1647	0.1608	0.1488	0.1498	0.1431	0.1392	0.1367	0.1358	0.1299	0.1288	0.1266
$LN(0.9)$	1.5146	0.6698	0.4777	0.3951	0.3322	0.3062	0.2812	0.276	0.2539	0.2502	0.236	0.2384	0.2261	0.2226	0.2168	0.2177	0.2113	0.2104	0.2053
$LN(1)$	1.6576	0.9933	0.7145	0.5813	0.5018	0.4545	0.4239	0.4209	0.3914	0.3822	0.3632	0.3655	0.3529	0.3511	0.3402	0.3457	0.3368	0.3358	0.3276
$LN(1.1)$	1.8266	1.5245	1.0475	0.8724	0.7529	0.6808	0.6386	0.6386	0.5988	0.5839	0.5674	0.5716	0.548	0.5496	0.5404	0.5447	0.5343	0.5318	0.5214
$LN(1.2)$	2.0254	2.1877	1.5736	1.2806	1.1076	1.0254	0.9626	0.9735	0.905	0.9008	0.8743	0.8864	0.8548	0.857	0.8378	0.8516	0.8372	0.8359	0.827
$W(0.5)$	2.2598	3.6714	2.5549	2.1371	1.8578	1.7084	1.6821	1.7282	1.6334	1.6247	1.5983	1.6415	1.5962	1.5741	1.5799	1.6026	1.5845	1.5745	1.572
$LN(1.4)$	2.5322	5.4136	3.4454	2.8471	2.4769	2.2894	2.195	2.258	2.125	2.1093	2.0744	2.1212	2.0686	2.0572	2.0515	2.0776	2.0562	2.0527	2.0441
$LN(1.5)$	2.8521	9.9978	5.507	4.2287	3.7519	3.5093	3.3567	3.4338	3.2968	3.2704	3.2326	3.3025	3.2259	3.2211	3.2256	3.2683	3.211	3.2165	3.2054
$LN(1.6)$	3.2262	17.0309	8.5665	6.225	5.6497	5.3929	5.1238	5.3058	5.1163	5.0803	5.0385	5.1399	5.0825	5.0542	5.0689	5.1168	5.0785	5.0592	5.0585
$LN(1.7)$	3.6635	24.402	14.7627	9.4296	8.6164	8.2005	7.9951	8.2378	7.9375	7.943	7.9022	8.0942	7.9627	7.9835	7.9585	8.0842	8.0018	8.0151	8.0182
$LN(2)$	5.4707	177.1664	96.87	36.982	33.9095	32.1282	31.5382	32.7847	32.2056	32.0525	31.8613	32.7112	32.3538	32.5298	32.4454	32.9426	32.7713	32.913	32.7939
$LN(2.2)$	7.2432	433.475	199.3828	93.1342	96.1641	85.4841	84.2205	86.7307	85.3662	85.442	85.7418	87.2712	86.4782	86.8303	87.037	88.042	87.6819	87.9029	88.0029



Tabela A.13: Eficiência Relativa da Média para modelos assimétricos

Modelo	$\tau$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\chi^2(20)$	1,0018	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\chi^2(15)$	1,0026	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\chi^2(10)$	1,0044	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\chi^2(9)$	1,0051	0,9975	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\chi^2(5)$	1,0126	0,994	0,989	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\chi^2(4)$	1,0182	0,9809	0,9772	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
G(1)	1,0624	0,9555	0,931	0,9508	0,98	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
G(0.75)	1,1055	0,9316	0,9028	0,9139	0,9496	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\chi^2(1)$	1,2183	0,8636	0,8476	0,8424	0,8605	0,9659	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
W(0.75)	1,3052	0,8256	0,8093	0,806	0,8197	0,9157	0,9664	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
LN(0.8)	1,3942	0,7948	0,7784	0,7429	0,7542	0,8234	0,8642	0,9547	0,9848	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
LN(0.9)	1,5146	0,7198	0,7062	0,6856	0,6714	0,7383	0,76	0,8648	0,8723	0,9769	0,9976	1	1	1	1	1	1	1	1
LN(1)	1,6576	0,6614	0,6069	0,6003	0,612	0,671	0,6949	0,75	0,8354	0,8953	0,9453	1	1	1	1	1	1	1	1
LN(1.1)	1,8266	0,5682	0,5344	0,5159	0,5507	0,5837	0,6139	0,7028	0,7669	0,8437	0,8808	0,9434	0,971	1	1	1	1	1	1
LN(1.2)	2,0254	0,5195	0,4812	0,4354	0,4712	0,5197	0,5642	0,6131	0,6826	0,7119	0,7848	0,8473	0,8772	0,9664	0,994	1	1	1	1
W(0.5)	2,2598	0,5588	0,4997	0,5023	0,5258	0,5717	0,6445	0,783	0,8019	0,8832	0,9421	1	1	1	1	1	1	1	1
LN(1.4)	2,5322	0,3826	0,3486	0,336	0,3204	0,3365	0,386	0,4601	0,5215	0,5332	0,6248	0,6433	0,636	0,7169	0,7243	0,8229	0,9285	0,9227	0,8435
LN(1.5)	2,8521	0,2006	0,2594	0,2886	0,2665	0,2963	0,3224	0,4058	0,4116	0,4819	0,5194	0,4874	0,5518	0,631	0,4808	0,7336	0,7411	0,7636	0,8306
LN(1.6)	3,2262	0,1635	0,208	0,204	0,244	0,222	0,2379	0,3096	0,3267	0,3907	0,4034	0,4701	0,4545	0,5007	0,4362	0,4729	0,685	0,7083	0,6636
LN(1.7)	3,6635	0,178	0,1287	0,0818	0,1744	0,1674	0,2191	0,1533	0,2479	0,199	0,2715	0,4178	0,3713	0,4126	0,465	0,4094	0,5252	0,5347	0,5987
LN(2)	5,4707	0,0896	0,0424	0,1118	0,0702	0,0692	0,1471	0,124	0,1635	0,162	0,1253	0,0912	0,1991	0,1704	0,2124	0,1952	0,2478	0,2887	0,0959
LN(2.2)	7,2432	0,0549	0,07	0,0397	0,0588	0,033	0,0479	0,0593	0,0979	0,1105	0,1047	0,08	0,1234	0,1199	0,1664	0,1578	0,1223	0,1881	0,1763

Tabela A.14: Eficiência Relativa da Mediana Total para modelos assimétricos

Modelo	$\tau$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\chi^2(20)$	1,0018	0,9896	0,9822	0,9412	0,9314	0,8952	0,8866	0,8526	0,8484	0,8247	0,8296	0,7978	0,7971	0,772	0,7753	0,7575	0,7506	0,7334	0,7319
$\chi^2(15)$	1,0026	0,993	0,9875	0,9352	0,9372	0,8954	0,8831	0,856	0,8449	0,8208	0,808	0,7896	0,7791	0,7704	0,7512	0,7507	0,7295	0,7267	0,7052
$\chi^2(10)$	1,0044	0,9969	0,995	0,9497	0,9403	0,899	0,8837	0,8539	0,8297	0,8117	0,7899	0,7787	0,757	0,7375	0,7318	0,7193	0,7102	0,6882	0,6735
$\chi^2(9)$	1,0051	1	0,9932	0,9565	0,9482	0,898	0,8907	0,8537	0,8391	0,8049	0,79	0,7681	0,7559	0,7367	0,7245	0,7113	0,6982	0,6766	0,6721
$\chi^2(5)$	1,0126	1	1	0,9747	0,9601	0,9093	0,8897	0,8475	0,8244	0,7829	0,7632	0,729	0,7132	0,6821	0,6672	0,6504	0,6335	0,6061	0,5979
$\chi^2(4)$	1,0182	1	1	0,9893	0,9732	0,9151	0,8845	0,8362	0,8221	0,7693	0,7525	0,7193	0,6896	0,6624	0,6477	0,6278	0,6072	0,5741	0,5574
G(1)	1,0624	1	1	1	1	0,9427	0,9034	0,8184	0,7835	0,7236	0,7059	0,6443	0,6179	0,582	0,5507	0,529	0,4988	0,4732	0,4622
G(0.75)	1,1055	1	1	1	1	0,9744	0,9109	0,8131	0,7864	0,702	0,6739	0,6205	0,589	0,5457	0,5193	0,4849	0,4645	0,4381	0,4174
$\chi^2(1)$	1,2183	0,9618	0,9961	1	1	1	0,9664	0,838	0,7917	0,704	0,6623	0,5912	0,5471	0,5164	0,4821	0,4459	0,4329	0,4091	0,3825
W(0.75)	1,3052	0,9332	0,9738	1	1	1	1	0,9125	0,855	0,7679	0,7334	0,6533	0,6219	0,5783	0,5368	0,4983	0,467	0,4382	0,4209
LN(0.8)	1,3942	0,9057	0,9473	1	1	1	1	1	0,9874	0,9299	0,8792	0,8226	0,7616	0,7105	0,6979	0,6524	0,6231	0,5844	0,55
LN(0.9)	1,5146	0,8509	0,9094	1	1	1	1	1	0,9877	0,9516	0,9369	0,8545	0,7849	0,7564	0,701	0,6557	0,629	0,5993	0,5651
LN(1)	1,6576	0,8051	0,8436	1	1	1	1	1	0,9894	0,95	0,9356	0,9017	0,8368	0,7838	0,7326	0,7181	0,6729	0,6297	0,6081
LN(1.1)	1,8266	0,7251	0,7936	1	1	1	1	1	0,9907	0,9485	0,9368	0,93	0,9022	0,8385	0,7685	0,733	0,6865	0,6396	0,6361
LN(1.2)	2,0254	0,678	0,7504	0,9859	1	1	1	1	0,9905	0,9475	0,9363	0,927	0,904	0,8819	0,8738	0,7758	0,7422	0,6967	0,7106
W(0.5)	2,2598	0,7198	0,772	1	1	1	1	1	0,9892	0,9407	0,9271	0,8505	0,7846	0,7481	0,6819	0,6405	0,5792	0,5436	0,5335
LN(1.4)	2,5322	0,5301	0,6174	0,9371	1	1	1	1	0,9909	0,9486	0,9384	0,9312	0,9075	0,8857	0,8802	0,8756	0,8622	0,8497	0,8469
LN(1.5)	2,8521	0,3001	0,4969	0,9067	0,9846	1	1	1	0,9951	0,9498	0,9402	0,9332	0,9118	0,8898	0,8858	0,8822	0,8674	0,8574	0,852
LN(1.6)	3,2262	0,2498	0,4204	0,8301	0,9789	1	1	1	0,997	0,9515	0,9418	0,935	0,916	0,8942	0,8907	0,886	0,8758	0,8634	0,8611
LN(1.7)	3,6635	0,2702	0,2828	0,554	0,9232	1	1	1	0,9985	0,9523	0,9458	0,9385	0,9186	0,8992	0,8957	0,8931	0,8822	0,8708	0,8705
LN(2)	5,4707	0,1409	0,1029	0,6344	0,6811	1	1	1	1	0,9628	0,955	0,9502	0,9343	0,9179	0,9153	0,9133	0,9063	0,8976	0,8958
LN(2.2)	7,2432	0,0882	0,1653	0,3465	0,6166	0,9387	1	1	1	0,9685	0,964	0,9582	0,9466	0,9323	0,93	0,9297	0,9226	0,9149	0,9148

Tabela A.15: Eficiência Relativa da Mediana para modelos assimétricos

Modelo	$\tau$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\chi^2(20)$	1,0018	0,7499	0,8448	0,7027	0,7782	0,6778	0,736	0,6557	0,7075	0,6449	0,6928	0,6269	0,668	0,6163	0,6525	0,614	0,638	0,6018	0,6222
$\chi^2(15)$	1,0026	0,7567	0,8529	0,6958	0,7813	0,6794	0,7298	0,6558	0,7032	0,6418	0,6734	0,6284	0,6506	0,6155	0,6315	0,6078	0,6172	0,5936	0,598
$\chi^2(10)$	1,0044	0,7617	0,8616	0,7036	0,7755	0,6789	0,7263	0,6535	0,6814	0,6329	0,6545	0,6144	0,6312	0,5887	0,6145	0,5855	0,6022	0,5657	0,574
$\chi^2(9)$	1,0051	0,7745	0,8555	0,7135	0,7869	0,6784	0,7335	0,6542	0,6889	0,623	0,6551	0,6099	0,6295	0,5889	0,6061	0,5779	0,5916	0,5526	0,5732
$\chi^2(5)$	1,0126	0,7705	0,8618	0,7249	0,7842	0,6808	0,719	0,6449	0,6689	0,6061	0,6254	0,573	0,5893	0,5457	0,558	0,5304	0,5349	0,5002	0,5092
$\chi^2(4)$	1,0182	0,7939	0,8642	0,73	0,7908	0,6801	0,7116	0,6315	0,6642	0,5942	0,6147	0,5663	0,5664	0,5286	0,5376	0,5113	0,5105	0,4737	0,4723
G(1)	1,0624	0,8083	0,8773	0,7257	0,7952	0,6839	0,7038	0,6088	0,6181	0,5518	0,5662	0,503	0,5022	0,464	0,4536	0,4317	0,4179	0,3906	0,3912
G(0.75)	1,1055	0,8374	0,8907	0,7338	0,7852	0,7028	0,6981	0,5975	0,6135	0,5344	0,5351	0,4825	0,4727	0,436	0,4278	0,3951	0,3875	0,364	0,3539
$\chi^2(1)$	1,2183	0,858	0,915	0,7328	0,7685	0,7095	0,7266	0,6114	0,6062	0,5298	0,519	0,4606	0,4383	0,4133	0,3943	0,3647	0,3616	0,3398	0,3234
W(0.75)	1,3052	0,8743	0,9233	0,7499	0,786	0,7262	0,7664	0,6778	0,6618	0,5899	0,5822	0,517	0,505	0,47	0,4448	0,4123	0,3941	0,3685	0,3599
LN(0.8)	1,3942	0,9042	0,9441	0,7916	0,8378	0,7572	0,7985	0,7676	0,796	0,733	0,7193	0,6646	0,634	0,587	0,5919	0,5469	0,5352	0,4992	0,4769
LN(0.9)	1,5146	0,9232	0,9488	0,806	0,8316	0,7604	0,8006	0,7717	0,7964	0,7576	0,7688	0,6935	0,6561	0,6299	0,594	0,5543	0,5419	0,5151	0,4927
LN(1)	1,6576	0,9424	0,9706	0,8183	0,8381	0,7542	0,7963	0,773	0,7933	0,7588	0,7682	0,7367	0,7003	0,6544	0,6244	0,61	0,5823	0,5434	0,5322
LN(1.1)	1,8266	0,9928	0,9787	0,8577	0,8475	0,7581	0,7923	0,7748	0,7967	0,7616	0,7727	0,7643	0,758	0,7071	0,6589	0,629	0,5969	0,557	0,5615
LN(1.2)	2,0254	1	0,9924	0,8718	0,8497	0,7692	0,7905	0,7825	0,7966	0,7675	0,7744	0,7693	0,7649	0,7485	0,7541	0,67	0,6507	0,6113	0,6308
W(0.5)	2,2598	0,9736	0,9698	0,8267	0,8014	0,751	0,7687	0,7663	0,7793	0,7487	0,7538	0,6992	0,6573	0,6309	0,5829	0,5513	0,5049	0,4754	0,4706
LN(1.4)	2,5322	1	1	0,8951	0,8964	0,7772	0,7907	0,7928	0,8019	0,7781	0,7859	0,7846	0,7779	0,7652	0,7699	0,772	0,765	0,7577	0,7627
LN(1.5)	2,8521	1	1	0,9036	0,9102	0,7814	0,7975	0,797	0,8147	0,7848	0,7929	0,7941	0,7889	0,7759	0,7815	0,7822	0,776	0,7711	0,7723
LN(1.6)	3,2262	1	1	0,8971	0,9124	0,7987	0,7996	0,8046	0,821	0,7951	0,8009	0,8051	0,7996	0,7861	0,7922	0,7921	0,791	0,782	0,7859
LN(1.7)	3,6635	1	1	0,9144	0,9032	0,7992	0,8056	0,8114	0,8269	0,8041	0,8112	0,8161	0,8074	0,7996	0,8029	0,806	0,8006	0,7953	0,7997
LN(2)	5,4707	1	1	0,9643	0,9378	0,8551	0,8276	0,8402	0,855	0,839	0,8433	0,8507	0,8453	0,8381	0,8403	0,8454	0,843	0,8394	0,8399
LN(2.2)	7,2432	1	1	0,9522	1	0,8801	0,8745	0,8594	0,8713	0,8644	0,8692	0,8755	0,8713	0,8661	0,8685	0,8732	0,8704	0,8667	0,8696

Tabela A.16: Eficiência Relativa da Tri-Média para modelos assimétricos

Modelo	$\tau$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\chi^2(20)$	1,0018	0,8911	0,9114	0,865	0,8906	0,8665	0,8789	0,8342	0,8388	0,841	0,8607	0,8159	0,8414	0,8172	0,83	0,8003	0,8143	0,7997	0,8061
$\chi^2(15)$	1,0026	0,8979	0,9194	0,8557	0,8963	0,8682	0,8746	0,8377	0,8564	0,8367	0,8386	0,8136	0,8226	0,8153	0,8092	0,7993	0,7958	0,792	0,7812
$\chi^2(10)$	1,0044	0,9045	0,9291	0,8688	0,8963	0,8697	0,8744	0,8355	0,8431	0,8283	0,8242	0,8014	0,8039	0,7894	0,7938	0,7708	0,782	0,7612	0,7564
$\chi^2(9)$	1,0051	0,9153	0,9247	0,8772	0,9036	0,8691	0,8811	0,8338	0,8506	0,8223	0,8254	0,7948	0,804	0,7915	0,7875	0,7656	0,7713	0,7503	0,7571
$\chi^2(5)$	1,0126	0,9155	0,9351	0,8879	0,9089	0,8778	0,8778	0,8291	0,8376	0,8088	0,8029	0,7621	0,7685	0,7447	0,7376	0,7153	0,7176	0,6935	0,6889
$\chi^2(4)$	1,0182	0,9339	0,9391	0,8999	0,9182	0,882	0,8713	0,8166	0,8352	0,7965	0,7928	0,754	0,7472	0,7284	0,7218	0,6985	0,6929	0,6638	0,6519
G(1)	1,0624	0,9568	0,9575	0,8982	0,9316	0,9039	0,8844	0,8	0,7999	0,7619	0,7559	0,6949	0,6861	0,6603	0,635	0,6109	0,5911	0,5721	0,5637
G(0.75)	1,1055	0,9873	0,9725	0,8981	0,9257	0,932	0,8888	0,7951	0,804	0,7432	0,7289	0,6742	0,6631	0,629	0,6078	0,5701	0,5613	0,5396	0,518
$\chi^2(1)$	1,2183	1	1	0,8948	0,9161	0,9534	0,9385	0,8176	0,8093	0,7528	0,7223	0,649	0,6239	0,6055	0,5744	0,5336	0,5323	0,512	0,4833
W(0.75)	1,3052	1	1	0,9081	0,9228	0,9586	0,9723	0,8905	0,8724	0,8179	0,7939	0,7124	0,7007	0,6686	0,6306	0,5883	0,5645	0,5403	0,5231
LN(0.8)	1,3942	1	1	0,9433	0,9493	0,9619	0,9774	0,9753	1	0,9703	0,9349	0,8783	0,8371	0,7995	0,7926	0,7421	0,7256	0,691	0,6566
LN(0.9)	1,5146	1	1	0,9506	0,946	0,9631	0,9753	0,9755	1	1	1	0,9143	0,8664	0,8526	0,8025	0,7535	0,7347	0,7131	0,6776
LN(1)	1,6576	1	1	0,9608	0,9503	0,9587	0,9725	0,9714	1	1	1	0,968	0,925	0,888	0,8391	0,8263	0,7898	0,7484	0,7314
LN(1.1)	1,8266	1	1	0,9883	0,953	0,9592	0,9696	0,9718	1	1	1	1	1	0,9522	0,8809	0,8427	0,8055	0,76	0,7629
LN(1.2)	2,0254	0,9848	1	1	0,9598	0,9578	0,9668	0,9712	1	1	1	1	1	1	1	0,8934	0,8678	0,8283	0,8485
W(0.5)	2,2598	1	1	0,9585	0,9208	0,954	0,9606	0,9698	1	1	1	0,9262	0,8796	0,8643	0,7936	0,7488	0,6886	0,6608	0,6502
LN(1.4)	2,5322	0,9049	0,9722	1	0,9912	0,9603	0,9624	0,9721	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
LN(1.5)	2,8521	0,6875	0,9123	1	1	0,9547	0,962	0,9691	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
LN(1.6)	3,2262	0,627	0,8689	1	1	0,9591	0,9617	0,9718	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
LN(1.7)	3,6635	0,6564	0,7479	1	1	0,962	0,9596	0,9694	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
LN(2)	5,4707	0,4235	0,4302	1	1	0,998	0,9624	0,9692	0,9973	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
LN(2.2)	7,2432	0,3022	0,5822	1	0,9731	1	0,9934	0,9703	0,9933	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Tabela A.17: Variância dos logaritmos do Desvio Padrão para modelos simétricos

Modelo	$\tau$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
N(0,1)	1	0,4178	0,2318	0,1672	0,1217	0,099	0,0841	0,0711	0,0595	0,0552	0,0502	0,0453	0,0427	0,038	0,0356	0,0323	0,0326	0,0299	0,0275
t(15)	1,092	0,4421	0,2523	0,1699	0,1336	0,1201	0,0944	0,0854	0,0711	0,0665	0,0583	0,0536	0,0489	0,0446	0,0421	0,0397	0,0374	0,0361	0,0347
t(10)	1,145	0,4553	0,2395	0,1846	0,1444	0,1156	0,1025	0,0866	0,0844	0,0668	0,0632	0,0585	0,0547	0,0526	0,0467	0,0445	0,0433	0,0394	0,0346
t(9)	1,164	0,4296	0,2825	0,1851	0,1499	0,1202	0,1019	0,0931	0,077	0,0762	0,0661	0,063	0,0538	0,0516	0,0486	0,0462	0,0453	0,0387	0,0398
t(8)	1,189	0,4666	0,2639	0,1936	0,1493	0,1316	0,1079	0,0934	0,0818	0,0713	0,0703	0,0626	0,0564	0,0559	0,051	0,0476	0,0466	0,0433	0,0393
Log(0,1)	1,213	0,4361	0,2674	0,2035	0,1604	0,1357	0,1094	0,0964	0,0846	0,0797	0,0685	0,0647	0,06	0,0509	0,0538	0,0489	0,0436	0,0434	0,0413
t(6)	1,27	0,4483	0,2896	0,2053	0,1671	0,1366	0,1209	0,1115	0,0977	0,0896	0,0748	0,0738	0,0685	0,0712	0,0567	0,0577	0,0542	0,0517	0,05
C(0,3,2)	1,319	0,4858	0,2938	0,2061	0,1728	0,1447	0,127	0,106	0,0904	0,0841	0,0782	0,0719	0,0672	0,0583	0,0596	0,053	0,0502	0,0494	0,0474
t(4)	1,467	0,5405	0,3279	0,2389	0,2112	0,168	0,1597	0,1409	0,1289	0,1167	0,1011	0,0981	0,0969	0,0971	0,0868	0,0754	0,081	0,0761	0,071
Lp(0,1)	1,636	0,5561	0,3613	0,2487	0,2145	0,1722	0,1588	0,1325	0,1244	0,112	0,1015	0,0974	0,0883	0,0842	0,0746	0,0764	0,0709	0,0649	0,0586
t(3)	1,721	0,5916	0,3884	0,3037	0,2454	0,2127	0,2	0,1727	0,1589	0,1565	0,1464	0,1403	0,1384	0,1406	0,1295	0,1127	0,1043	0,12	0,102
CN(0,3,3)	1,835	0,5588	0,3688	0,2914	0,2411	0,207	0,1847	0,1512	0,1416	0,1279	0,1223	0,1135	0,1064	0,0957	0,0887	0,081	0,0826	0,0747	0,0736
CN(0,3,4)	2,331	0,6831	0,4907	0,3966	0,3327	0,2742	0,2373	0,2074	0,193	0,1801	0,1578	0,145	0,1388	0,1328	0,121	0,1098	0,1053	0,0998	0,0944
CN(0,3,5)	2,853	0,8381	0,5846	0,4651	0,3825	0,3349	0,2987	0,2673	0,2408	0,2197	0,1938	0,1761	0,1701	0,1511	0,1447	0,1359	0,1233	0,1166	0,1111
CN(0,3,6)	3,344	0,9377	0,6609	0,5435	0,4623	0,3957	0,3427	0,3101	0,2722	0,2589	0,2264	0,2131	0,201	0,1732	0,1549	0,1411	0,14	0,1289	0,1225
CN(0,3,7)	3,847	1,027	0,7454	0,6115	0,5282	0,4413	0,3799	0,3438	0,3086	0,2697	0,2512	0,2342	0,2104	0,1967	0,1691	0,1602	0,1497	0,1464	0,1343
CN(0,3,8)	4,336	1,1241	0,8442	0,6977	0,5492	0,4947	0,4386	0,3737	0,3425	0,3026	0,2737	0,2366	0,2315	0,2144	0,198	0,1717	0,164	0,1544	0,1486
CN(0,3,9)	4,842	1,2086	0,8874	0,7808	0,6247	0,5206	0,4381	0,4056	0,3429	0,3138	0,2771	0,2783	0,2236	0,2169	0,1956	0,2019	0,1647	0,1575	0,1537
CN(0,3,10)	5,335	1,2869	0,9663	0,8153	0,6475	0,5717	0,4996	0,4312	0,3963	0,3363	0,3049	0,2731	0,2455	0,2316	0,2241	0,1881	0,1842	0,162	0,1586
CN(0,3,11)	5,838	1,3803	1,0224	0,8587	0,713	0,5976	0,5283	0,4537	0,4117	0,3492	0,3275	0,2669	0,2586	0,2241	0,2077	0,1944	0,1946	0,169	0,1649
CN(0,3,12)	6,344	1,4501	1,1414	0,8862	0,7511	0,6414	0,5268	0,4873	0,4025	0,3613	0,338	0,298	0,2735	0,2345	0,2195	0,187	0,1893	0,1784	0,1585
CN(0,3,13)	6,834	1,5502	1,1285	0,9383	0,803	0,6826	0,5668	0,5291	0,4383	0,3866	0,3371	0,3028	0,2659	0,2493	0,2308	0,2091	0,1929	0,1725	0,1433

Tabela A.18: Variância dos logaritmos da Amplitude Total para modelos simétricos

Modelo	$\tau$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
N(0,1)	1	0,4199	0,2325	0,168	0,1223	0,1011	0,0851	0,0738	0,0616	0,0574	0,0535	0,0479	0,0459	0,0413	0,0404	0,0358	0,0371	0,0338	0,0324
t(15)	1,092	0,4443	0,2531	0,1696	0,1347	0,1224	0,0965	0,0881	0,0742	0,07	0,0637	0,0599	0,0541	0,0505	0,0488	0,0455	0,044	0,0429	0,0415
t(10)	1,145	0,4569	0,2394	0,1848	0,1451	0,117	0,1049	0,0904	0,0871	0,0717	0,0701	0,0648	0,0611	0,061	0,0538	0,052	0,0515	0,0478	0,0432
t(9)	1,164	0,4309	0,2841	0,1844	0,15	0,1211	0,1036	0,0968	0,0807	0,0819	0,072	0,0701	0,0598	0,0595	0,0567	0,0551	0,0556	0,0489	0,0496
t(8)	1,189	0,47	0,2642	0,1944	0,1501	0,1324	0,1088	0,0968	0,0856	0,0762	0,0759	0,0691	0,063	0,0639	0,0599	0,057	0,0571	0,0536	0,0501
Log(0,1)	1,213	0,4384	0,2668	0,204	0,1615	0,138	0,1115	0,1007	0,0885	0,0859	0,0747	0,0716	0,0678	0,0577	0,0624	0,0582	0,0531	0,0541	0,0508
t(6)	1,27	0,4492	0,2889	0,2046	0,166	0,1363	0,1223	0,1143	0,1012	0,0965	0,0822	0,0823	0,0769	0,0815	0,0668	0,0682	0,0654	0,0645	0,0641
C(0,3,2)	1,319	0,4882	0,2935	0,2055	0,1731	0,1463	0,1295	0,1104	0,0968	0,0915	0,086	0,0809	0,0775	0,0682	0,0714	0,065	0,0637	0,0618	0,0608
t(4)	1,467	0,5395	0,3259	0,2348	0,206	0,1661	0,1596	0,1432	0,1331	0,1221	0,1078	0,1055	0,1064	0,1107	0,1001	0,0886	0,0957	0,0919	0,0888
Lp(0,1)	1,636	0,5538	0,358	0,2463	0,2135	0,1718	0,1606	0,1372	0,1297	0,118	0,1099	0,1059	0,098	0,0952	0,0856	0,0877	0,0827	0,0769	0,0706
t(3)	1,721	0,59	0,3786	0,2931	0,2358	0,2076	0,1936	0,1727	0,1613	0,1602	0,1513	0,1469	0,1492	0,1505	0,141	0,1276	0,1226	0,1357	0,1213
CN(0,3,3)	1,835	0,5573	0,3612	0,2848	0,237	0,2046	0,1877	0,1548	0,1487	0,1377	0,1329	0,1271	0,1202	0,1106	0,1044	0,0962	0,1001	0,0918	0,0916
CN(0,3,4)	2,331	0,6798	0,4765	0,3856	0,3234	0,2682	0,2359	0,2087	0,1979	0,1907	0,1699	0,1591	0,1528	0,1476	0,1375	0,127	0,1236	0,1167	0,1135
CN(0,3,5)	2,853	0,8291	0,5646	0,4454	0,3663	0,3253	0,2946	0,269	0,245	0,2287	0,2028	0,1883	0,1851	0,1656	0,1605	0,1531	0,1387	0,135	0,128
CN(0,3,6)	3,344	0,9235	0,6367	0,516	0,4412	0,3826	0,3363	0,3095	0,2763	0,265	0,2348	0,2276	0,2146	0,1862	0,1694	0,156	0,1551	0,1421	0,1365
CN(0,3,7)	3,847	1,0084	0,7131	0,5793	0,5029	0,4249	0,3725	0,3408	0,3097	0,2764	0,2609	0,2481	0,2241	0,2121	0,1829	0,176	0,1652	0,1616	0,1488
CN(0,3,8)	4,336	1,1013	0,8061	0,6577	0,5224	0,4765	0,4273	0,3685	0,3459	0,3073	0,2826	0,2476	0,2469	0,2285	0,2127	0,1873	0,1786	0,1694	0,1641
CN(0,3,9)	4,842	1,1854	0,845	0,7413	0,5913	0,495	0,4236	0,4019	0,343	0,3218	0,2867	0,2921	0,2351	0,2317	0,2096	0,2204	0,1783	0,1702	0,167
CN(0,3,10)	5,335	1,2589	0,9232	0,7715	0,6111	0,548	0,4867	0,427	0,3997	0,3427	0,3142	0,2844	0,26	0,2454	0,2403	0,2023	0,1981	0,1757	0,1735
CN(0,3,11)	5,838	1,3542	0,9771	0,8121	0,6771	0,5734	0,5133	0,4484	0,4146	0,3563	0,338	0,279	0,273	0,2375	0,2191	0,2091	0,2113	0,182	0,1794
CN(0,3,12)	6,344	1,4187	1,0853	0,8348	0,7157	0,6163	0,5135	0,4806	0,408	0,3702	0,3487	0,3121	0,2898	0,2506	0,2345	0,2008	0,2045	0,1946	0,1717
CN(0,3,13)	6,834	1,5143	1,0747	0,8901	0,76	0,6529	0,554	0,5249	0,4395	0,394	0,3478	0,3188	0,2819	0,2652	0,2495	0,2227	0,2077	0,1866	0,1555

Tabela A.19: Variância dos logaritmos da Amplitude para modelos simétricos

Modelo	$\tau$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
N(0,1)	1	0,4199	0,2367	0,1733	0,1278	0,108	0,0921	0,0819	0,0687	0,0648	0,0609	0,0548	0,0528	0,0481	0,0476	0,0425	0,0441	0,0404	0,0395
t(15)	1,092	0,4443	0,2553	0,1774	0,1414	0,1332	0,1073	0,0986	0,0839	0,0796	0,0746	0,0712	0,0636	0,0604	0,059	0,0544	0,0536	0,0524	0,0507
t(10)	1,145	0,4569	0,2438	0,1913	0,1559	0,1279	0,1159	0,1035	0,0981	0,0841	0,0837	0,077	0,0731	0,0738	0,0652	0,0634	0,0631	0,0593	0,0539
t(9)	1,164	0,4309	0,2889	0,1919	0,161	0,1328	0,1146	0,1102	0,092	0,0957	0,0849	0,0836	0,0708	0,0718	0,0698	0,068	0,07	0,0616	0,0619
t(8)	1,189	0,47	0,2671	0,2014	0,1623	0,1449	0,1201	0,1101	0,0994	0,0897	0,0888	0,0825	0,0757	0,078	0,074	0,0708	0,0708	0,0664	0,0634
Log(0,1)	1,213	0,4384	0,2707	0,2138	0,1737	0,1521	0,1231	0,1147	0,1007	0,1002	0,0877	0,0857	0,0815	0,0696	0,0757	0,0715	0,0658	0,0673	0,0631
t(6)	1,27	0,4492	0,2923	0,2147	0,1802	0,1509	0,1392	0,1311	0,1194	0,1149	0,0998	0,0994	0,0939	0,0997	0,0829	0,0845	0,0816	0,0816	0,0817
C(0,3,2)	1,319	0,4882	0,3002	0,2188	0,1864	0,1609	0,1455	0,127	0,1136	0,1079	0,1026	0,0966	0,0945	0,0835	0,0874	0,0799	0,0798	0,0767	0,0754
t(4)	1,467	0,5395	0,3337	0,2477	0,2242	0,1891	0,1838	0,168	0,1582	0,1467	0,1305	0,1296	0,1314	0,1389	0,1257	0,1136	0,1218	0,117	0,1143
Lp(0,1)	1,636	0,5538	0,3657	0,2599	0,2324	0,1906	0,179	0,1568	0,149	0,1363	0,1289	0,1246	0,1166	0,1129	0,1028	0,1053	0,1003	0,0923	0,0863
t(3)	1,721	0,59	0,3911	0,3147	0,2597	0,234	0,2228	0,2031	0,194	0,1951	0,1862	0,1806	0,1856	0,1888	0,1773	0,1617	0,1572	0,1736	0,1563
CN(0,3,3)	1,835	0,5573	0,3702	0,3028	0,26	0,2294	0,2175	0,1785	0,1753	0,1635	0,157	0,1528	0,1428	0,133	0,1262	0,1154	0,1196	0,1113	0,1102
CN(0,3,4)	2,331	0,6798	0,489	0,4118	0,3567	0,3008	0,2704	0,2376	0,229	0,2225	0,1988	0,1866	0,1764	0,1714	0,16	0,1482	0,1435	0,1355	0,1327
CN(0,3,5)	2,853	0,8291	0,5844	0,4739	0,4022	0,3627	0,33	0,3064	0,2782	0,2625	0,2298	0,2142	0,2114	0,1882	0,1822	0,1727	0,1565	0,1537	0,1442
CN(0,3,6)	3,344	0,9235	0,6586	0,5546	0,4813	0,4263	0,3764	0,3461	0,3093	0,2974	0,2655	0,2578	0,2408	0,2068	0,1885	0,1743	0,1715	0,1537	0,1496
CN(0,3,7)	3,847	1,0084	0,7382	0,6179	0,5479	0,4696	0,4134	0,3795	0,344	0,3058	0,2891	0,2752	0,2505	0,2334	0,1999	0,1915	0,1801	0,177	0,1621
CN(0,3,8)	4,336	1,1013	0,8345	0,6994	0,5661	0,5232	0,4741	0,4092	0,3841	0,3398	0,309	0,2692	0,2709	0,2475	0,2303	0,2025	0,1907	0,1812	0,1758
CN(0,3,9)	4,842	1,1854	0,8741	0,7877	0,6375	0,5403	0,4679	0,4409	0,3772	0,3535	0,311	0,3189	0,2541	0,2491	0,2246	0,236	0,1917	0,1799	0,1769
CN(0,3,10)	5,335	1,2589	0,9529	0,8196	0,6629	0,5974	0,5306	0,463	0,4368	0,3696	0,3414	0,3056	0,2802	0,2605	0,2565	0,2138	0,2099	0,1863	0,1829
CN(0,3,11)	5,838	1,3542	1,0064	0,86	0,7367	0,6212	0,5611	0,4907	0,4489	0,385	0,3644	0,3016	0,2929	0,2515	0,2326	0,2191	0,2235	0,1902	0,1887
CN(0,3,12)	6,344	1,4187	1,121	0,8813	0,768	0,6685	0,5591	0,5229	0,4435	0,3977	0,375	0,3342	0,3091	0,2634	0,2458	0,2117	0,2158	0,203	0,1787
CN(0,3,13)	6,834	1,5143	1,1075	0,9426	0,8155	0,707	0,5986	0,5697	0,4756	0,4239	0,3684	0,3406	0,2975	0,2787	0,2628	0,2289	0,215	0,1932	0,1613

Tabela A.20: Variância dos logaritmos do Desvio Absoluto da Média para modelos simétricos

Modelo	$\tau$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
N(0,1)	1	0,4198	0,2355	0,1734	0,1287	0,1055	0,0906	0,0757	0,065	0,0612	0,0546	0,0502	0,0468	0,0426	0,0384	0,0366	0,0361	0,0338	0,0303
t(15)	1,092	0,4433	0,2579	0,173	0,1397	0,1225	0,0955	0,0879	0,074	0,0688	0,0594	0,0535	0,05	0,046	0,0434	0,0415	0,0389	0,037	0,0356
t(10)	1,145	0,4569	0,2421	0,1882	0,1447	0,1172	0,1033	0,087	0,086	0,0665	0,0629	0,0574	0,0533	0,05	0,0466	0,0443	0,0424	0,0388	0,0343
t(9)	1,164	0,4318	0,2844	0,1879	0,1511	0,12	0,1032	0,0913	0,0768	0,0744	0,0645	0,0602	0,053	0,0502	0,0467	0,0442	0,0419	0,0364	0,0377
t(8)	1,189	0,467	0,2694	0,1973	0,1499	0,1315	0,109	0,0921	0,0806	0,0695	0,0679	0,0602	0,0545	0,0534	0,048	0,0451	0,0442	0,0402	0,0358
Log(0,1)	1,213	0,4367	0,2723	0,2037	0,1572	0,1313	0,1101	0,0954	0,0841	0,0772	0,0675	0,0625	0,0575	0,05	0,0517	0,047	0,0418	0,0409	0,0401
t(6)	1,27	0,4506	0,2954	0,2058	0,1633	0,1329	0,1144	0,1053	0,0908	0,0814	0,0688	0,0666	0,0625	0,0611	0,0507	0,0512	0,0477	0,045	0,0425
C(0,3,2)	1,319	0,4868	0,2936	0,2026	0,1694	0,1413	0,1234	0,1008	0,085	0,0784	0,0718	0,0667	0,0609	0,0542	0,0541	0,0479	0,0446	0,0453	0,0421
t(4)	1,467	0,5445	0,3285	0,236	0,2022	0,1543	0,1453	0,1233	0,1124	0,0999	0,085	0,0818	0,0776	0,0739	0,0667	0,0577	0,0606	0,0571	0,0515
Lp(0,1)	1,636	0,5614	0,36	0,2432	0,2055	0,1617	0,1501	0,124	0,1146	0,1024	0,092	0,0883	0,0785	0,0751	0,0662	0,0682	0,0626	0,059	0,0514
t(3)	1,721	0,5956	0,3865	0,2915	0,2308	0,1942	0,1775	0,1479	0,1293	0,1254	0,1141	0,1073	0,102	0,0995	0,0922	0,0782	0,0715	0,0799	0,0674
CN(0,3,3)	1,835	0,5627	0,3683	0,2829	0,2252	0,1892	0,1611	0,1348	0,122	0,1082	0,1032	0,094	0,0891	0,0773	0,0732	0,0668	0,067	0,0604	0,0599
CN(0,3,4)	2,331	0,6894	0,49	0,3783	0,307	0,247	0,2073	0,182	0,1642	0,1496	0,1304	0,1191	0,1136	0,1091	0,0973	0,0908	0,0842	0,0817	0,0754
CN(0,3,5)	2,853	0,8495	0,5789	0,4457	0,3527	0,3006	0,2645	0,231	0,2073	0,1842	0,1652	0,1505	0,1419	0,1275	0,1214	0,1131	0,105	0,0972	0,0931
CN(0,3,6)	3,344	0,9524	0,6539	0,5179	0,4299	0,3552	0,3047	0,2735	0,238	0,2259	0,1931	0,1801	0,1726	0,152	0,1368	0,1225	0,1229	0,1159	0,1078
CN(0,3,7)	3,847	1,0452	0,7366	0,5851	0,4894	0,4013	0,3415	0,3066	0,2721	0,2397	0,2221	0,2079	0,1817	0,1734	0,1531	0,1442	0,1351	0,1304	0,1213
CN(0,3,8)	4,336	1,1447	0,8349	0,6735	0,5139	0,4543	0,3935	0,333	0,3004	0,2708	0,2455	0,2165	0,2062	0,1943	0,1811	0,1569	0,1553	0,1423	0,1401
CN(0,3,9)	4,842	1,2287	0,8808	0,7511	0,589	0,4834	0,3967	0,367	0,3104	0,2821	0,2564	0,2514	0,2104	0,2047	0,1844	0,187	0,1578	0,1535	0,1495
CN(0,3,10)	5,335	1,3105	0,9573	0,7833	0,6083	0,5317	0,4584	0,3975	0,3602	0,3147	0,2829	0,2578	0,2308	0,2212	0,213	0,1851	0,1774	0,161	0,1557
CN(0,3,11)	5,838	1,4013	1,0162	0,8281	0,6642	0,5597	0,4844	0,4159	0,3799	0,3258	0,3079	0,2497	0,2434	0,2217	0,2039	0,194	0,1929	0,1745	0,1667
CN(0,3,12)	6,344	1,4757	1,1316	0,8616	0,712	0,5984	0,4858	0,4502	0,373	0,3421	0,3157	0,286	0,2667	0,2363	0,2223	0,1917	0,1896	0,1855	0,1664
CN(0,3,13)	6,834	1,5767	1,1229	0,9044	0,76	0,6369	0,525	0,489	0,4083	0,3608	0,3231	0,2907	0,2632	0,2493	0,2319	0,2175	0,2034	0,1823	0,1588



Tabela A.21: Eficiência Relativa do Desvio Padrão para modelos simétricos

Modelo	$\tau$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
N(0,1)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
t(15)	1,092	1	1	0,9986	1	1	1	1	1	1	1	0,9981	1	1	1	1	1	1	1
t(10)	1,145	1	0,9996	1	1	1	1	1	1	0,9953	0,9956	0,9816	0,9734	0,9502	0,9991	0,9953	0,9809	0,985	0,976529
t(9)	1,164	1	1	0,9965	1	0,9988	1	0,9807	0,9977	0,9764	0,9756	0,9561	0,9859	0,9738	0,9609	0,9558	0,9235	0,9385	0,949563
t(8)	1,189	1	1	1	1	0,9994	1	0,9859	0,985	0,9744	0,9655	0,9616	0,967	0,9544	0,9416	0,948	0,9474	0,9302	0,932312
Log(0,1)	1,213	1	0,9977	1	0,9804	0,9671	1	0,989	0,9946	0,9681	0,9852	0,9662	0,9586	0,9822	0,96	0,9614	0,9573	0,9416	0,939727
t(6)	1,27	1	0,9973	0,9963	0,9771	0,9728	0,9464	0,9443	0,9294	0,9084	0,9195	0,902	0,9128	0,8582	0,8939	0,8861	0,8809	0,8706	0,839204
C(0,3,2)	1,319	1	0,9988	0,9829	0,9801	0,9762	0,9713	0,9511	0,9406	0,9321	0,9184	0,9285	0,9074	0,9287	0,9091	0,9034	0,8875	0,9166	0,895308
t(4)	1,467	0,9981	0,994	0,9831	0,9572	0,9182	0,9094	0,875	0,8718	0,8561	0,8402	0,8336	0,8009	0,7614	0,7687	0,7659	0,7478	0,7505	0,720579
Lp(0,1)	1,636	0,9958	0,9909	0,9778	0,9582	0,9389	0,9452	0,9354	0,9212	0,9141	0,9063	0,9063	0,8893	0,8914	0,8877	0,8933	0,8829	0,9102	0,89099
t(3)	1,721	0,9973	0,9748	0,96	0,9403	0,913	0,8872	0,8563	0,8136	0,8011	0,7793	0,7644	0,7374	0,7078	0,7118	0,6943	0,6858	0,6661	0,633004
CN(0,3,3)	1,835	0,9974	0,9793	0,9709	0,934	0,9139	0,8719	0,8917	0,8617	0,8455	0,8442	0,8284	0,8372	0,808	0,825	0,8242	0,8117	0,8086	0,788135
CN(0,3,4)	2,331	0,9953	0,9712	0,954	0,9226	0,9009	0,8738	0,8777	0,851	0,8304	0,8265	0,8212	0,8186	0,8214	0,8047	0,8266	0,7998	0,819	0,792075
CN(0,3,5)	2,853	0,9892	0,9659	0,9576	0,9219	0,8977	0,8856	0,864	0,861	0,8383	0,8525	0,8547	0,8338	0,8439	0,8387	0,8318	0,8514	0,8338	0,827265
CN(0,3,6)	3,344	0,9848	0,9635	0,9493	0,93	0,8979	0,889	0,8818	0,8744	0,8726	0,853	0,8449	0,8588	0,8777	0,883	0,8681	0,8778	0,8995	0,887031
CN(0,3,7)	3,847	0,9818	0,9567	0,9473	0,9265	0,9094	0,8989	0,8917	0,8817	0,8887	0,8841	0,8878	0,8639	0,8816	0,9052	0,9001	0,9024	0,8908	0,917147
CN(0,3,8)	4,336	0,9797	0,9548	0,9428	0,9357	0,9184	0,8973	0,8911	0,8771	0,8949	0,897	0,9154	0,8906	0,906	0,9146	0,9139	0,947	0,9215	0,941555
CN(0,3,9)	4,842	0,9807	0,9522	0,9495	0,9429	0,9286	0,9055	0,9047	0,9051	0,899	0,9252	0,9036	0,9409	0,9438	0,9427	0,9262	0,958	0,9746	0,988849
CN(0,3,10)	5,335	0,9782	0,9554	0,9463	0,9394	0,9301	0,9176	0,9219	0,9091	0,9357	0,928	0,9442	0,94	0,9551	0,9504	0,9839	0,9629	0,9938	1
CN(0,3,11)	5,838	0,9811	0,9556	0,9458	0,9315	0,9366	0,917	0,9166	0,9227	0,933	0,9402	0,9356	0,9413	0,9889	0,9813	0,998	0,9914	1	1
CN(0,3,12)	6,344	0,9784	0,9509	0,942	0,9479	0,9329	0,9222	0,924	0,9269	0,9471	0,9339	0,9596	0,975	1	1	1	1	1	1
CN(0,3,13)	6,834	0,9769	0,9524	0,9486	0,9464	0,9331	0,9262	0,9243	0,9315	0,9333	0,9584	0,9601	0,9899	0,9998	1	1	1	1	1

Tabela A.22: Eficiência Relativa da Amplitude Total para modelos simétricos

Modelo	$\tau$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
N(0,1)	1	0,9949	0,9973	0,9951	0,995	0,9794	0,9881	0,9632	0,9661	0,9608	0,9379	0,944	0,9301	0,9197	0,8818	0,9027	0,8789	0,8852	0,8479
t(15)	1,092	0,995	0,9967	1	0,9916	0,9813	0,9789	0,9691	0,9589	0,9512	0,9145	0,894	0,9037	0,8837	0,8636	0,8724	0,849	0,84	0,836
t(10)	1,145	0,9964	1	0,9987	0,9953	0,9885	0,9772	0,9578	0,9684	0,9273	0,8976	0,8858	0,8723	0,8196	0,8668	0,8524	0,8246	0,8129	0,7936
t(9)	1,164	0,997	0,9941	1	0,9992	0,9909	0,9843	0,9436	0,9513	0,9092	0,8958	0,8597	0,887	0,8434	0,8238	0,8024	0,7524	0,7433	0,7609
t(8)	1,189	0,9927	0,999	0,9955	0,995	0,9927	0,9918	0,9513	0,9411	0,9123	0,8943	0,8708	0,8651	0,8348	0,802	0,791	0,7731	0,7513	0,7142
Log(0,1)	1,213	0,9946	1	0,9974	0,9738	0,9511	0,9814	0,947	0,9503	0,8981	0,9032	0,873	0,8486	0,8652	0,828	0,8068	0,7858	0,7545	0,7894
t(6)	1,27	0,9981	1	1	0,9837	0,9749	0,9354	0,9209	0,8974	0,843	0,837	0,8097	0,813	0,75	0,7593	0,7505	0,7305	0,6979	0,6628
C(0,3,2)	1,319	0,9952	1	0,9858	0,9785	0,9661	0,9527	0,9131	0,8784	0,8567	0,8347	0,825	0,7864	0,7939	0,7587	0,7368	0,7	0,7331	0,6925
t(4)	1,467	1	1	1	0,9813	0,9292	0,9102	0,8605	0,8445	0,8184	0,7879	0,7748	0,7291	0,6682	0,6666	0,6516	0,6332	0,6214	0,5804
Lp(0,1)	1,636	1	1	0,9872	0,9626	0,9415	0,9344	0,9038	0,8836	0,868	0,837	0,8335	0,8012	0,7884	0,7735	0,7782	0,7569	0,7676	0,7281
t(3)	1,721	1	1	0,9945	0,9786	0,9355	0,9166	0,8563	0,8018	0,783	0,7541	0,7303	0,6839	0,6615	0,6539	0,6135	0,5835	0,5891	0,556
CN(0,3,3)	1,835	1	1	0,9932	0,95	0,9245	0,8582	0,871	0,8205	0,7852	0,7765	0,7395	0,7416	0,6989	0,701	0,6941	0,6698	0,6573	0,6539
CN(0,3,4)	2,331	1	1	0,9812	0,9492	0,9209	0,8788	0,8724	0,8297	0,7844	0,7677	0,7487	0,7437	0,7393	0,708	0,7147	0,6816	0,7001	0,6645
CN(0,3,5)	2,853	1	1	1	0,9628	0,9241	0,898	0,8588	0,8464	0,8052	0,8145	0,7994	0,7665	0,7698	0,7564	0,7386	0,757	0,7201	0,7275
CN(0,3,6)	3,344	1	1	1	0,9746	0,9286	0,9061	0,8837	0,8615	0,8525	0,8223	0,7911	0,8044	0,8164	0,8072	0,7854	0,7923	0,8157	0,7899
CN(0,3,7)	3,847	1	1	1	0,9732	0,9445	0,917	0,8995	0,8787	0,8674	0,8512	0,8382	0,8111	0,8175	0,8367	0,8194	0,8175	0,8071	0,8157
CN(0,3,8)	4,336	1	1	1	0,9837	0,9535	0,921	0,9037	0,8684	0,8812	0,869	0,8747	0,8352	0,8503	0,8513	0,8378	0,8694	0,8401	0,8542
CN(0,3,9)	4,842	1	1	1	0,9961	0,9767	0,9364	0,9132	0,9049	0,8767	0,8945	0,8608	0,8951	0,8837	0,8799	0,8484	0,8851	0,9017	0,8951
CN(0,3,10)	5,335	1	1	1	0,9955	0,9702	0,9418	0,9309	0,9012	0,9183	0,9006	0,9065	0,8877	0,9012	0,8861	0,9149	0,8954	0,9162	0,8973
CN(0,3,11)	5,838	1	1	1	0,981	0,9762	0,9437	0,9274	0,9162	0,9144	0,9111	0,8953	0,8917	0,9334	0,9303	0,9277	0,9129	0,9287	0,9188
CN(0,3,12)	6,344	1	1	1	0,9948	0,971	0,946	0,9368	0,9144	0,9243	0,9052	0,9164	0,9204	0,9359	0,9363	0,9312	0,9257	0,917	0,9236
CN(0,3,13)	6,834	1	1	1	1	0,9755	0,9476	0,9317	0,9289	0,9157	0,929	0,9119	0,9338	0,9399	0,9249	0,939	0,929	0,9244	0,9221

Tabela A.23: Eficiência Relativa da Amplitude para modelos simétricos

Modelo	$\tau$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
N(0,1)	1	0,9949	0,9973	0,9951	0,995	0,9794	0,9881	0,9632	0,9661	0,9608	0,9379	0,944	0,9301	0,9197	0,8818	0,9027	0,8789	0,8852	0,8479
t(15)	1,092	0,995	0,9967	1	0,9916	0,9813	0,9789	0,9691	0,9589	0,9512	0,9145	0,894	0,9037	0,8837	0,8636	0,8724	0,849	0,84	0,836
t(10)	1,145	0,9964	1	0,9987	0,9953	0,9885	0,9772	0,9578	0,9684	0,9273	0,8976	0,8858	0,8723	0,8196	0,8668	0,8524	0,8246	0,8129	0,7936
t(9)	1,164	0,997	0,9941	1	0,9992	0,9909	0,9843	0,9436	0,9513	0,9092	0,8958	0,8597	0,887	0,8434	0,8238	0,8024	0,7524	0,7433	0,7609
t(8)	1,189	0,9927	0,999	0,9955	0,995	0,9927	0,9918	0,9513	0,9411	0,9123	0,8943	0,8708	0,8651	0,8348	0,802	0,791	0,7731	0,7513	0,7142
Log(0,1)	1,213	0,9946	1	0,9974	0,9738	0,9511	0,9814	0,947	0,9503	0,8981	0,9032	0,873	0,8486	0,8652	0,828	0,8068	0,7858	0,7545	0,7894
t(6)	1,27	0,9981	1	1	0,9837	0,9749	0,9354	0,9209	0,8974	0,843	0,837	0,8097	0,813	0,75	0,7593	0,7505	0,7305	0,6979	0,6628
C(0,3,2)	1,319	0,9952	1	0,9858	0,9785	0,9661	0,9527	0,9131	0,8784	0,8567	0,8347	0,825	0,7864	0,7939	0,7587	0,7368	0,7	0,7331	0,6925
t(4)	1,467	1	1	1	0,9813	0,9292	0,9102	0,8605	0,8445	0,8184	0,7879	0,7748	0,7291	0,6682	0,6666	0,6516	0,6332	0,6214	0,5804
Lp(0,1)	1,636	1	1	0,9872	0,9626	0,9415	0,9344	0,9038	0,8836	0,868	0,837	0,8335	0,8012	0,7884	0,7735	0,7782	0,7569	0,7676	0,7281
t(3)	1,721	1	1	0,9945	0,9786	0,9355	0,9166	0,8563	0,8018	0,783	0,7541	0,7303	0,6839	0,6615	0,6539	0,6135	0,5835	0,5891	0,556
CN(0,3,3)	1,835	1	1	0,9932	0,95	0,9245	0,8582	0,871	0,8205	0,7852	0,7765	0,7395	0,7416	0,6989	0,701	0,6941	0,6698	0,6573	0,6539
CN(0,3,4)	2,331	1	1	0,9812	0,9492	0,9209	0,8788	0,8724	0,8297	0,7844	0,7677	0,7487	0,7437	0,7393	0,708	0,7147	0,6816	0,7001	0,6645
CN(0,3,5)	2,853	1	1	1	0,9628	0,9241	0,898	0,8588	0,8464	0,8052	0,8145	0,7994	0,7665	0,7698	0,7564	0,7386	0,757	0,7201	0,7275
CN(0,3,6)	3,344	1	1	1	0,9746	0,9286	0,9061	0,8837	0,8615	0,8525	0,8223	0,7911	0,8044	0,8164	0,8072	0,7854	0,7923	0,8157	0,7899
CN(0,3,7)	3,847	1	1	1	0,9732	0,9445	0,917	0,8995	0,8787	0,8674	0,8512	0,8382	0,8111	0,8175	0,8367	0,8194	0,8175	0,8071	0,8157
CN(0,3,8)	4,336	1	1	1	0,9837	0,9535	0,921	0,9037	0,8684	0,8812	0,869	0,8747	0,8352	0,8503	0,8513	0,8378	0,8694	0,8401	0,8542
CN(0,3,9)	4,842	1	1	1	0,9961	0,9767	0,9364	0,9132	0,9049	0,8767	0,8945	0,8608	0,8951	0,8837	0,8799	0,8484	0,8851	0,9017	0,8951
CN(0,3,10)	5,335	1	1	1	0,9955	0,9702	0,9418	0,9309	0,9012	0,9183	0,9006	0,9065	0,8877	0,9012	0,8861	0,9149	0,8954	0,9162	0,8973
CN(0,3,11)	5,838	1	1	1	0,981	0,9762	0,9437	0,9274	0,9162	0,9144	0,9111	0,8953	0,8917	0,9334	0,9303	0,9277	0,9129	0,9287	0,9188
CN(0,3,12)	6,344	1	1	1	0,9948	0,971	0,946	0,9368	0,9144	0,9243	0,9052	0,9164	0,9204	0,9359	0,9363	0,9312	0,9257	0,917	0,9236
CN(0,3,13)	6,834	1	1	1	1	0,9755	0,9476	0,9317	0,9289	0,9157	0,929	0,9119	0,9338	0,9399	0,9249	0,939	0,929	0,9244	0,9221

Tabela A.24: Eficiência Relativa do Desvio Absoluto da Média para modelos simétricos

Modelo	$\tau$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
N(0,1)	1	0,995	0,9843	0,9643	0,9459	0,9381	0,928	0,9388	0,9155	0,9022	0,9194	0,9006	0,9129	0,8924	0,9265	0,8839	0,9043	0,8859	0,9068
t(15)	1,092	0,9974	0,978	0,9808	0,9565	0,9804	0,9889	0,971	0,9608	0,9671	0,9816	1	0,9782	0,9692	0,9703	0,9568	0,9593	0,9744	0,9734
t(10)	1,145	0,9964	0,9888	0,9808	0,9983	0,9867	0,9928	0,9956	0,9807	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
t(9)	1,164	0,995	0,9932	0,9816	0,992	1	0,988	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
t(8)	1,189	0,9992	0,9795	0,9812	0,9959	1	0,9897	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Log(0,1)	1,213	0,9985	0,98	0,9986	1	1	0,9936	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
t(6)	1,27	0,9951	0,9778	0,9939	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
C(0,3,2)	1,319	0,998	0,9994	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
t(4)	1,467	0,9908	0,9921	0,9949	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Lp(0,1)	1,636	0,9864	0,9945	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
t(3)	1,721	0,9905	0,9796	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
CN(0,3,3)	1,835	0,9904	0,9809	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
CN(0,3,4)	2,331	0,9862	0,9725	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
CN(0,3,5)	2,853	0,976	0,9754	0,9994	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
CN(0,3,6)	3,344	0,9697	0,9738	0,9962	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
CN(0,3,7)	3,847	0,9648	0,968	0,9902	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
CN(0,3,8)	4,336	0,9621	0,9655	0,9765	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
CN(0,3,9)	4,842	0,9647	0,9594	0,987	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
CN(0,3,10)	5,335	0,9606	0,9644	0,985	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
CN(0,3,11)	5,838	0,9664	0,9615	0,9806	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,9685	0,9892	0,9617
CN(0,3,12)	6,344	0,9614	0,9591	0,9689	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,9922	0,9875	0,9752	0,9982	0,9617	0,9525
CN(0,3,13)	6,834	0,9605	0,9571	0,9842	0,9999	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,9953	0,9615	0,9485	0,9462	0,9025

Tabela A.25: Variância dos logaritmos do Desvio Padrão para modelos assimétricos

Modelo	$\tau$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\chi^2(20)$	1,0018	0,4269	0,2567	0,1679	0,1289	0,1119	0,0963	0,0811	0,0755	0,0664	0,0613	0,0583	0,051	0,0475	0,0457	0,0428	0,0424	0,0413	0,0371
$\chi^2(15)$	1,0026	0,4543	0,2727	0,1925	0,1461	0,1132	0,0988	0,0846	0,074	0,0693	0,062	0,053	0,053	0,0513	0,0491	0,0462	0,0449	0,0436	0,0406
$\chi^2(10)$	1,0044	0,4327	0,2754	0,1895	0,142	0,1194	0,1069	0,0962	0,0821	0,0734	0,0648	0,0664	0,0613	0,0545	0,0507	0,0498	0,0481	0,0479	0,0439
$\chi^2(9)$	1,0051	0,4638	0,2774	0,1935	0,1447	0,1262	0,1009	0,0929	0,0808	0,0754	0,0734	0,0646	0,061	0,0578	0,0566	0,0518	0,0524	0,0467	0,0452
$\chi^2(5)$	1,0126	0,5121	0,3145	0,2164	0,1634	0,1436	0,1297	0,1094	0,102	0,0947	0,0875	0,0759	0,0771	0,0703	0,0703	0,0621	0,0609	0,06	0,057
$\chi^2(4)$	1,0182	0,5103	0,3239	0,2281	0,1759	0,1636	0,1397	0,1209	0,1084	0,1006	0,0915	0,0866	0,084	0,0751	0,0733	0,0705	0,0669	0,0644	0,0622
G(1)	1,0624	0,6944	0,4318	0,3288	0,2726	0,2205	0,2016	0,1722	0,1596	0,1494	0,1391	0,1311	0,1232	0,1145	0,1106	0,109	0,1023	0,1003	0,0959
G(0.75)	1,1055	0,8169	0,5393	0,4016	0,3348	0,273	0,2294	0,2236	0,1917	0,1861	0,1681	0,1545	0,1583	0,1426	0,1387	0,1321	0,1212	0,1168	0,1098
$\chi^2(1)$	1,2183	1,1107	0,7739	0,5609	0,4456	0,3826	0,3431	0,3093	0,2643	0,2353	0,2289	0,2269	0,1943	0,1958	0,189	0,1686	0,1762	0,1606	0,1625
W(0.75)	1,3052	1,0055	0,6976	0,5248	0,4364	0,3586	0,3232	0,3038	0,2869	0,259	0,2396	0,2318	0,215	0,2017	0,1858	0,181	0,1774	0,1669	0,1626
LN(0.8)	1,3942	0,7142	0,516	0,4066	0,3337	0,3049	0,2719	0,2454	0,221	0,2178	0,2178	0,2005	0,1963	0,1787	0,1808	0,1736	0,1645	0,1698	0,1616
LN(0.9)	1,5146	0,8372	0,5563	0,449	0,4206	0,3588	0,3158	0,2956	0,274	0,2506	0,2437	0,2528	0,2331	0,221	0,2131	0,228	0,2062	0,2034	0,1949
LN(1)	1,6576	0,9034	0,6885	0,5505	0,4734	0,4217	0,3937	0,3454	0,3471	0,3035	0,2957	0,293	0,2805	0,2697	0,2615	0,2559	0,26	0,2551	0,2168
LN(1.1)	1,8266	1,0181	0,7658	0,606	0,5383	0,4834	0,4664	0,4114	0,3919	0,3937	0,3363	0,3509	0,3378	0,3147	0,3207	0,3057	0,3088	0,2913	0,3011
LN(1.2)	2,0254	1,1746	0,8849	0,7343	0,6138	0,5703	0,5115	0,4944	0,4447	0,4599	0,4132	0,408	0,3653	0,3849	0,3727	0,3423	0,3575	0,3447	0,3346
W(0.5)	2,2598	1,9423	1,4248	1,0723	0,9273	0,8512	0,7364	0,6821	0,5973	0,5636	0,5553	0,5293	0,5069	0,4434	0,4506	0,4229	0,4011	0,3855	0,3917
LN(1.4)	2,5322	1,4761	1,0429	0,9034	0,8244	0,7148	0,6942	0,6268	0,6002	0,6055	0,573	0,544	0,5223	0,5187	0,4961	0,4996	0,4802	0,4505	0,4826
LN(1.5)	2,8521	1,5943	1,2415	1,0358	0,9293	0,851	0,782	0,7462	0,7002	0,68	0,643	0,684	0,6168	0,5716	0,6091	0,5578	0,5564	0,5505	0,5365
LN(1.6)	3,2262	1,7498	1,3908	1,2108	1,0499	0,9744	0,8851	0,8323	0,8036	0,7459	0,7622	0,6772	0,7033	0,6589	0,662	0,621	0,628	0,6435	0,6167
LN(1.7)	3,6635	1,907	1,531	1,2973	1,2518	1,0592	1,0114	0,9111	0,8693	0,8284	0,8186	0,8015	0,7861	0,7687	0,7114	0,7751	0,7178	0,701	0,687
LN(2)	5,4707	2,5666	2,016	1,7136	1,6634	1,4623	1,3315	1,3843	1,2499	1,1252	1,1602	1,1087	1,084	1,0407	1,0439	1,0426	0,9908	0,9856	1,024
LN(2.2)	7,2432	2,933	2,4912	2,1135	1,9176	1,725	1,5805	1,6094	1,5173	1,5217	1,4316	1,37	1,3497	1,3487	1,3006	1,194	1,205	1,2126	1,1893

Tabela A.26: Variância dos logaritmos da Amplitude Total para modelos assimétricos

Modelo	$\tau$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\chi^2(20)$	1,0018	0,4269	0,2567	0,1679	0,1289	0,1119	0,0963	0,0811	0,0755	0,0664	0,0613	0,0583	0,051	0,0475	0,0457	0,0428	0,0424	0,0413	0,0371
$\chi^2(15)$	1,0026	0,4543	0,2727	0,1925	0,1461	0,1132	0,0988	0,0846	0,074	0,0693	0,062	0,053	0,053	0,0513	0,0491	0,0462	0,0449	0,0436	0,0406
$\chi^2(10)$	1,0044	0,4327	0,2754	0,1895	0,142	0,1194	0,1069	0,0962	0,0821	0,0734	0,0648	0,0664	0,0613	0,0545	0,0507	0,0498	0,0481	0,0479	0,0439
$\chi^2(9)$	1,0051	0,4638	0,2774	0,1935	0,1447	0,1262	0,1009	0,0929	0,0808	0,0754	0,0734	0,0646	0,061	0,0578	0,0566	0,0518	0,0524	0,0467	0,0452
$\chi^2(5)$	1,0126	0,5121	0,3145	0,2164	0,1634	0,1436	0,1297	0,1094	0,102	0,0947	0,0875	0,0759	0,0771	0,0703	0,0703	0,0621	0,0609	0,06	0,057
$\chi^2(4)$	1,0182	0,5103	0,3239	0,2281	0,1759	0,1636	0,1397	0,1209	0,1084	0,1006	0,0915	0,0866	0,084	0,0751	0,0733	0,0705	0,0669	0,0644	0,0622
G(1)	1,0624	0,6944	0,4318	0,3288	0,2726	0,2205	0,2016	0,1722	0,1596	0,1494	0,1391	0,1311	0,1232	0,1145	0,1106	0,109	0,1023	0,1003	0,0959
G(0.75)	1,1055	0,8169	0,5393	0,4016	0,3348	0,273	0,2294	0,2236	0,1917	0,1861	0,1681	0,1545	0,1583	0,1426	0,1387	0,1321	0,1212	0,1168	0,1098
$\chi^2(1)$	1,2183	1,1107	0,7739	0,5609	0,4456	0,3826	0,3431	0,3093	0,2643	0,2353	0,2289	0,2269	0,1943	0,1958	0,189	0,1686	0,1762	0,1606	0,1625
W(0.75)	1,3052	1,0055	0,6976	0,5248	0,4364	0,3586	0,3232	0,3038	0,2869	0,259	0,2396	0,2318	0,215	0,2017	0,1858	0,181	0,1774	0,1669	0,1626
LN(0.8)	1,3942	0,7142	0,516	0,4066	0,3337	0,3049	0,2719	0,2454	0,221	0,2178	0,2178	0,2005	0,1963	0,1787	0,1868	0,1736	0,1645	0,1698	0,1616
LN(0.9)	1,5146	0,8372	0,5563	0,449	0,4206	0,3588	0,3158	0,2956	0,274	0,2506	0,2437	0,2528	0,2331	0,221	0,2131	0,228	0,2062	0,2034	0,1949
LN(1)	1,6576	0,9034	0,6885	0,5505	0,4734	0,4217	0,3937	0,3454	0,3471	0,3035	0,2957	0,293	0,2805	0,2697	0,2615	0,2559	0,26	0,2551	0,2168
LN(1.1)	1,8266	1,0181	0,7658	0,606	0,5383	0,4834	0,4664	0,4114	0,3919	0,3937	0,3363	0,3509	0,3378	0,3147	0,3207	0,3057	0,3088	0,2913	0,3011
LN(1.2)	2,0254	1,1746	0,8849	0,7343	0,6138	0,5703	0,5115	0,4944	0,4447	0,4599	0,4132	0,408	0,3653	0,3849	0,3727	0,3423	0,3575	0,3447	0,3346
W(0.5)	2,2598	1,9423	1,4248	1,0723	0,9273	0,8512	0,7364	0,6821	0,5973	0,5636	0,5553	0,5293	0,5069	0,4434	0,4506	0,4229	0,4011	0,3855	0,3917
LN(1.4)	2,5322	1,4761	1,0429	0,9034	0,8244	0,7148	0,6942	0,6268	0,6002	0,6055	0,573	0,544	0,5223	0,5187	0,4961	0,4996	0,4802	0,4505	0,4826
LN(1.5)	2,8521	1,5943	1,2415	1,0358	0,9293	0,851	0,782	0,7462	0,7002	0,68	0,643	0,684	0,6168	0,5716	0,6091	0,5578	0,5564	0,5505	0,5365
LN(1.6)	3,2262	1,7498	1,3908	1,2108	1,0499	0,9744	0,8851	0,8323	0,8036	0,7459	0,7622	0,6772	0,7033	0,6589	0,662	0,621	0,628	0,6435	0,6167
LN(1.7)	3,6635	1,907	1,531	1,2973	1,2518	1,0592	1,0114	0,9111	0,8693	0,8284	0,8186	0,8015	0,7861	0,7687	0,7114	0,7751	0,7178	0,701	0,687
LN(2)	5,4707	2,5666	2,016	1,7136	1,6634	1,4623	1,3315	1,3843	1,2499	1,1252	1,1602	1,1087	1,084	1,0407	1,0439	1,0426	0,9908	0,9856	1,024
LN(2.2)	7,2432	2,933	2,4912	2,1135	1,9176	1,725	1,5805	1,6094	1,5173	1,5217	1,4316	1,37	1,3497	1,3487	1,3006	1,194	1,205	1,2126	1,1893

Tabela A.27: Variância dos logaritmos da Amplitude para modelos assimétricos

Modelo	$\tau$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\chi^2(20)$	1,0018	0,4251	0,2638	0,1727	0,1343	0,1202	0,1013	0,0853	0,08	0,0685	0,062	0,0574	0,0522	0,0475	0,0432	0,0392	0,0401	0,0383	0,0345
$\chi^2(15)$	1,0026	0,4582	0,2794	0,2003	0,1559	0,1188	0,1011	0,087	0,0757	0,0696	0,0651	0,052	0,0532	0,0495	0,0474	0,0425	0,042	0,0389	0,0356
$\chi^2(10)$	1,0044	0,4361	0,2818	0,1965	0,1489	0,1263	0,1121	0,0992	0,085	0,0732	0,0652	0,0653	0,0602	0,0519	0,0481	0,0447	0,0453	0,0421	0,0395
$\chi^2(9)$	1,0051	0,4709	0,2846	0,2039	0,1543	0,133	0,1058	0,0959	0,082	0,0751	0,0724	0,0628	0,0589	0,0552	0,0524	0,0464	0,0463	0,0416	0,0402
$\chi^2(5)$	1,0126	0,5178	0,3296	0,2272	0,1734	0,1499	0,1377	0,1144	0,1031	0,0919	0,0856	0,073	0,0722	0,0672	0,0625	0,0556	0,0531	0,0516	0,0483
$\chi^2(4)$	1,0182	0,5245	0,3361	0,2378	0,1861	0,1698	0,1453	0,1242	0,1083	0,097	0,0874	0,0801	0,0761	0,0679	0,0655	0,0606	0,0565	0,0545	0,0503
G(1)	1,0624	0,7205	0,4542	0,3421	0,2823	0,2303	0,2045	0,1703	0,1525	0,1453	0,1281	0,1181	0,1084	0,0993	0,0936	0,0909	0,0836	0,0796	0,075
G(0.75)	1,1055	0,8449	0,5647	0,4142	0,3472	0,2782	0,2317	0,2188	0,1852	0,175	0,154	0,1386	0,1401	0,1247	0,118	0,1116	0,0985	0,0969	0,0881
$\chi^2(1)$	1,2183	1,138	0,7992	0,5787	0,4578	0,3856	0,3395	0,2943	0,2534	0,2243	0,2125	0,2046	0,175	0,1679	0,157	0,1414	0,1429	0,1303	0,1281
W(0.75)	1,3052	1,0397	0,7285	0,544	0,4499	0,3669	0,3189	0,2902	0,2713	0,2374	0,2209	0,2032	0,1851	0,1699	0,1518	0,1454	0,1393	0,132	0,1228
LN(0.8)	1,3942	0,7391	0,5449	0,431	0,3465	0,3118	0,2685	0,2361	0,2063	0,2017	0,1897	0,1731	0,1649	0,1432	0,1482	0,1321	0,1218	0,1215	0,1138
LN(0.9)	1,5146	0,8694	0,5912	0,473	0,4387	0,364	0,3136	0,2833	0,2552	0,2278	0,2145	0,2141	0,1936	0,1761	0,1675	0,1729	0,1505	0,1446	0,1375
LN(1)	1,6576	0,9392	0,7293	0,5822	0,4914	0,4286	0,3924	0,3387	0,3229	0,2766	0,2587	0,2528	0,2326	0,2189	0,1993	0,1933	0,193	0,1837	0,1573
LN(1.1)	1,8266	1,0604	0,8187	0,6418	0,5635	0,4986	0,4583	0,3931	0,365	0,3585	0,2931	0,2979	0,2788	0,2551	0,2521	0,233	0,2303	0,2093	0,2139
LN(1.2)	2,0254	1,2237	0,9405	0,7773	0,6347	0,5822	0,512	0,4765	0,4116	0,415	0,3617	0,3524	0,31	0,3148	0,295	0,2622	0,267	0,2563	0,2385
W(0.5)	2,2598	2,003	1,4834	1,1089	0,9477	0,8541	0,7237	0,6656	0,5662	0,5276	0,4952	0,4697	0,4363	0,383	0,3736	0,3458	0,3212	0,304	0,2979
LN(1.4)	2,5322	1,5396	1,1097	0,9534	0,8553	0,7246	0,6902	0,6031	0,5572	0,5485	0,5099	0,4731	0,4405	0,4269	0,4016	0,396	0,3724	0,3384	0,3605
LN(1.5)	2,8521	1,6631	1,3109	1,0951	0,9692	0,864	0,7736	0,7259	0,6545	0,6248	0,5774	0,5941	0,5325	0,4787	0,5015	0,4391	0,4385	0,4132	0,3968
LN(1.6)	3,2262	1,8202	1,4721	1,2752	1,0883	0,991	0,8843	0,8062	0,7602	0,6885	0,6878	0,6012	0,6022	0,5595	0,5399	0,5034	0,4966	0,5025	0,4692
LN(1.7)	3,6635	1,9763	1,6072	1,3674	1,3001	1,0751	1,0102	0,887	0,8209	0,7646	0,7427	0,7212	0,6756	0,6503	0,5972	0,6365	0,5692	0,5455	0,5287
LN(2)	5,4707	2,6571	2,1194	1,7953	1,7228	1,4848	1,3318	1,3536	1,1996	1,0528	1,059	0,9901	0,9585	0,9073	0,8995	0,8799	0,8204	0,7956	0,8315
LN(2.2)	7,2432	3,0344	2,6105	2,1991	1,9789	1,7495	1,5792	1,5738	1,4599	1,4312	1,3249	1,2458	1,2199	1,1889	1,1337	1,1018	1,0224	1,0161	0,9791

Tabela A.28: Variância dos logaritmos do Desvio Absoluto da Média para modelos assimétricos

Modelo	$\tau$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\chi^2(20)$	1,0018	0,4251	0,2638	0,1727	0,1343	0,1202	0,1013	0,0853	0,08	0,0635	0,062	0,0574	0,0522	0,0475	0,0432	0,0392	0,0401	0,0383	0,0345
$\chi^2(15)$	1,0026	0,4582	0,2794	0,2003	0,1559	0,1188	0,1011	0,087	0,0757	0,0696	0,0651	0,052	0,0532	0,0495	0,0474	0,0425	0,042	0,0389	0,0356
$\chi^2(10)$	1,0044	0,4361	0,2818	0,1965	0,1489	0,1263	0,1121	0,0992	0,085	0,0732	0,0652	0,0653	0,0602	0,0519	0,0481	0,0447	0,0453	0,0421	0,0395
$\chi^2(9)$	1,0051	0,4709	0,2846	0,2039	0,1543	0,133	0,1058	0,0959	0,082	0,0751	0,0724	0,0628	0,0589	0,0552	0,0524	0,0464	0,0463	0,0416	0,0402
$\chi^2(5)$	1,0126	0,5178	0,3296	0,2272	0,1734	0,1499	0,1377	0,1144	0,1031	0,0919	0,0856	0,073	0,0722	0,0672	0,0625	0,0556	0,0531	0,0516	0,0483
$\chi^2(4)$	1,0182	0,5245	0,3361	0,2378	0,1861	0,1698	0,1453	0,1242	0,1083	0,097	0,0874	0,0801	0,0761	0,0679	0,0655	0,0606	0,0565	0,0545	0,0503
$G(1)$	1,0624	0,7205	0,4542	0,3421	0,2823	0,2303	0,2045	0,1703	0,1525	0,1453	0,1281	0,1181	0,1084	0,0993	0,0936	0,0909	0,0836	0,0796	0,075
$G(0.75)$	1,1055	0,8449	0,5647	0,4142	0,3472	0,2782	0,2317	0,2188	0,1852	0,175	0,154	0,1386	0,1401	0,1247	0,118	0,1116	0,0985	0,0969	0,0881
$\chi^2(1)$	1,2183	1,138	0,7992	0,5787	0,4578	0,3856	0,3395	0,2943	0,2534	0,2243	0,2125	0,2046	0,175	0,1679	0,157	0,1414	0,1429	0,1303	0,1281
$W(0.75)$	1,3052	1,0397	0,7285	0,544	0,4499	0,3669	0,3189	0,2902	0,2713	0,2374	0,2209	0,2032	0,1851	0,1699	0,1518	0,1454	0,1393	0,132	0,1228
$LN(0.8)$	1,3942	0,7391	0,5449	0,431	0,3465	0,3118	0,2685	0,2361	0,2063	0,2017	0,1897	0,1731	0,1649	0,1432	0,1482	0,1321	0,1218	0,1215	0,1138
$LN(0.9)$	1,5146	0,8694	0,5912	0,473	0,4387	0,364	0,3136	0,2833	0,2552	0,2278	0,2145	0,2141	0,1936	0,1761	0,1675	0,1729	0,1505	0,1446	0,1375
$LN(1)$	1,6576	0,9392	0,7293	0,5822	0,4914	0,4286	0,3924	0,3387	0,3229	0,2766	0,2587	0,2528	0,2326	0,2189	0,1993	0,1933	0,193	0,1837	0,1573
$LN(1.1)$	1,8266	1,0604	0,8187	0,6418	0,5635	0,4986	0,4583	0,3931	0,365	0,3585	0,2931	0,2979	0,2788	0,2551	0,2521	0,233	0,2303	0,2093	0,2139
$LN(1.2)$	2,0254	1,2237	0,9405	0,7773	0,6347	0,5822	0,512	0,4765	0,4116	0,415	0,3617	0,3524	0,31	0,3148	0,295	0,2622	0,267	0,2563	0,2385
$W(0.5)$	2,2598	2,003	1,4834	1,1089	0,9477	0,8541	0,7237	0,6656	0,5662	0,5276	0,4952	0,4697	0,4363	0,383	0,3736	0,3458	0,3212	0,304	0,2979
$LN(1.4)$	2,5322	1,5396	1,1097	0,9534	0,8553	0,7246	0,6902	0,6031	0,5572	0,5485	0,5099	0,4731	0,4405	0,4269	0,4016	0,396	0,3724	0,3384	0,3605
$LN(1.5)$	2,8521	1,6631	1,3109	1,0951	0,9692	0,864	0,7736	0,7259	0,6545	0,6248	0,5774	0,5941	0,5325	0,4787	0,5015	0,4391	0,4385	0,4132	0,3968
$LN(1.6)$	3,2262	1,8202	1,4721	1,2752	1,0883	0,991	0,8843	0,8062	0,7602	0,6885	0,6878	0,6012	0,6022	0,5595	0,5399	0,5034	0,4966	0,5025	0,4692
$LN(1.7)$	3,6635	1,9763	1,6072	1,3674	1,3001	1,0751	1,0102	0,887	0,8209	0,7646	0,7427	0,7212	0,6756	0,6503	0,5972	0,6365	0,5692	0,5455	0,5287
$LN(2)$	5,4707	2,6571	2,1194	1,7953	1,7228	1,4848	1,3318	1,3536	1,1996	1,0528	1,059	0,9901	0,9585	0,9073	0,8995	0,8799	0,8204	0,7956	0,8315
$LN(2.2)$	7,2432	3,0344	2,6105	2,1991	1,9789	1,7495	1,5792	1,5738	1,4599	1,4312	1,3249	1,2458	1,2199	1,1889	1,1337	1,018	1,0224	1,0161	0,9791



Tabela A.29: Eficiência Relativa do Desvio Padrão para modelos assimétricos

Modelo	$\tau$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\chi^2(20)$	1,0018	1	0,9961	0,9893	0,9876	0,9858	0,9932	0,9999	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\chi^2(15)$	1,0026	0,9991	0,9992	0,9941	0,986	0,9883	0,9957	0,9898	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\chi^2(10)$	1,0044	0,9997	0,9931	0,9902	0,9811	0,9711	0,9666	0,9834	0,9857	1	1	1	1	1	1	0,9775	0,9985	0,9698	0,9875
$\chi^2(9)$	1,0051	0,9958	0,9858	0,9857	0,9727	0,968	0,9749	0,9774	0,9842	0,9969	0,986	0,9908	0,9872	0,9854	0,9855	0,966	0,9567	0,9816	0,9883
$\chi^2(5)$	1,0126	0,9968	0,9775	0,9715	0,9533	0,954	0,9502	0,9494	0,9613	0,9513	0,9618	0,9538	0,9473	0,9641	0,9308	0,9391	0,9347	0,9239	0,925
$\chi^2(4)$	1,0182	0,9877	0,9784	0,9617	0,9486	0,9512	0,9424	0,95	0,9592	0,9319	0,9299	0,927	0,9161	0,9197	0,9187	0,9018	0,9055	0,9077	0,8861
G(1)	1,0624	0,9823	0,9622	0,9444	0,9426	0,9312	0,9349	0,9389	0,9114	0,9264	0,8971	0,8837	0,874	0,8779	0,8669	0,8629	0,8615	0,8538	0,8562
G(0.75)	1,1055	0,983	0,9603	0,9505	0,9453	0,9384	0,9356	0,9241	0,9157	0,9061	0,8941	0,8849	0,8861	0,878	0,8689	0,8727	0,8544	0,8743	0,8692
$\chi^2(1)$	1,2183	0,9868	0,9691	0,9575	0,9498	0,9429	0,9353	0,9132	0,9236	0,9219	0,9052	0,8979	0,8983	0,8698	0,8585	0,86	0,8496	0,858	0,8386
W(0.75)	1,3052	0,9824	0,9604	0,9465	0,9363	0,9255	0,9189	0,8988	0,8959	0,8755	0,8875	0,8577	0,852	0,8431	0,8307	0,824	0,8159	0,827	0,8046
LN(0.8)	1,3942	0,9837	0,9543	0,9307	0,9241	0,9136	0,9042	0,8903	0,8678	0,8606	0,8225	0,8188	0,8085	0,7838	0,7855	0,7699	0,7564	0,7415	0,7371
LN(0.9)	1,5146	0,9805	0,9469	0,9275	0,913	0,9075	0,9003	0,8768	0,8567	0,8463	0,8306	0,8061	0,8034	0,7801	0,7699	0,7548	0,7373	0,7222	0,7293
LN(1)	1,6576	0,9793	0,9507	0,9247	0,9114	0,9066	0,9009	0,8952	0,8551	0,8461	0,8191	0,8148	0,7985	0,7847	0,7481	0,7488	0,7392	0,7319	0,7432
LN(1.1)	1,8266	0,9781	0,9431	0,9202	0,9109	0,9046	0,8937	0,8715	0,8552	0,8413	0,8145	0,8019	0,7868	0,783	0,7672	0,7541	0,7437	0,7285	0,7219
LN(1.2)	2,0254	0,9777	0,9477	0,9171	0,9127	0,9078	0,907	0,8766	0,8502	0,8389	0,8218	0,8104	0,8037	0,7829	0,7688	0,7529	0,7411	0,742	0,7235
W(0.5)	2,2598	0,9819	0,9608	0,9463	0,939	0,9385	0,9237	0,9233	0,9	0,893	0,8567	0,8606	0,8436	0,8503	0,8202	0,8164	0,8077	0,8038	0,7825
LN(1.4)	2,5322	0,9761	0,9415	0,9248	0,9148	0,9116	0,9033	0,8813	0,8558	0,8396	0,8317	0,8192	0,8011	0,7883	0,7817	0,7677	0,76	0,7452	0,7405
LN(1.5)	2,8521	0,9752	0,9483	0,9231	0,915	0,9123	0,9062	0,8907	0,8618	0,8524	0,8394	0,8208	0,8213	0,8028	0,7935	0,7674	0,773	0,7408	0,7329
LN(1.6)	3,2262	0,977	0,9455	0,9259	0,9192	0,9131	0,9165	0,8888	0,8747	0,8587	0,848	0,8391	0,8131	0,8131	0,7877	0,7848	0,773	0,7684	0,7556
LN(1.7)	3,6635	0,9784	0,9507	0,9296	0,919	0,9182	0,9161	0,8995	0,8753	0,8603	0,8526	0,8516	0,8191	0,8115	0,808	0,7981	0,7746	0,7659	0,7604
LN(2)	5,4707	0,9786	0,9501	0,9329	0,929	0,9263	0,9292	0,9111	0,896	0,8811	0,8634	0,8469	0,8462	0,8374	0,8306	0,8165	0,8055	0,7929	0,7972
LN(2.2)	7,2432	0,979	0,9547	0,941	0,9343	0,9332	0,9316	0,9161	0,9052	0,8877	0,8796	0,8685	0,8634	0,8467	0,8414	0,8262	0,8278	0,8183	0,8072

Tabela A.30: Eficiência Relativa da Amplitude Total para modelos assimétricos

Modelo	$\tau$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
$\chi^2(20)$	1,0018	0,993	1	1	1	1	1	1	0,9969	0,989	0,9824	0,9525	0,9673	0,947	0,9278	0,9004	0,9141	0,8995	0,8921	
$\chi^2(15)$	1,0026	1	1	1	1	1	1	1	0,9955	0,9923	0,9934	0,9624	0,9737	0,937	0,9456	0,9094	0,9141	0,8882	0,8755	
$\chi^2(10)$	1,0044	1	1	1	1	1	1	1	1	0,9885	0,9975	0,9808	0,9701	0,9475	0,948	0,8974	0,9416	0,8778	0,8996	
$\chi^2(9)$	1,0051	1	1	1	1	1	1	1	1	0,997	0,9874	0,971	0,966	0,956	0,926	0,8972	0,8839	0,8894	0,8885	
$\chi^2(5)$	1,0126	1	1	1	1	1	1	1	1	0,9704	0,9785	0,9617	0,9364	0,9558	0,8898	0,895	0,8718	0,8607	0,8482	
$\chi^2(4)$	1,0182	1	1	1	1	1	1	1	0,9987	0,9648	0,956	0,925	0,9069	0,9046	0,893	0,8591	0,8449	0,8469	0,8083	
G(1)	1,0624	1	1	1	1	1	1	0,9891	0,9555	0,9723	0,9212	0,9011	0,8793	0,8667	0,8465	0,8342	0,8171	0,7933	0,7817	
G(0.75)	1,1055	1	1	1	1	1	1	0,9787	0,9659	0,9407	0,9162	0,8975	0,8849	0,8745	0,851	0,8442	0,8131	0,8292	0,8018	
$\chi^2(1)$	1,2183	1	1	1	1	1	1	0,9893	0,9517	0,9589	0,9533	0,9282	0,9016	0,9006	0,8577	0,8308	0,8386	0,8111	0,788	
W(0.75)	1,3052	1	1	1	1	1	1	0,9868	0,955	0,9459	0,9165	0,922	0,8767	0,8611	0,8421	0,8172	0,8031	0,7851	0,755	
LN(0.8)	1,3942	1	1	1	1	1	1	0,9872	0,9622	0,9335	0,9263	0,871	0,8636	0,8397	0,8014	0,7931	0,7611	0,7405	0,7039	
LN(0.9)	1,5146	1	1	1	1	1	1	0,9928	0,9585	0,9313	0,9091	0,88	0,8469	0,8307	0,797	0,7862	0,7582	0,7301	0,7053	
LN(1)	1,6576	1	1	1	1	1	1	0,9967	0,9806	0,9301	0,9115	0,8752	0,8626	0,8294	0,8114	0,7621	0,7554	0,7421	0,7253	
LN(1.1)	1,8266	1	1	1	1	1	1	0,9827	0,9555	0,9312	0,9108	0,8716	0,8488	0,8255	0,8105	0,7861	0,7624	0,7456	0,7104	
LN(1.2)	2,0254	1	1	1	1	1	1	0,9638	0,9256	0,9022	0,8755	0,8636	0,8486	0,8177	0,7916	0,7661	0,747	0,7434	0,7129	
W(0.5)	2,2598	1	1	1	1	1	1	0,9827	0,9758	0,948	0,9361	0,8916	0,8875	0,8608	0,8639	0,8291	0,8177	0,8009	0,7886	0,7606
LN(1.4)	2,5322	1	1	1	1	1	1	0,9942	0,9621	0,9284	0,9059	0,8899	0,8697	0,8434	0,8231	0,8095	0,7926	0,7757	0,7512	0,747
LN(1.5)	2,8521	1	1	1	1	1	1	0,9892	0,9728	0,9347	0,9189	0,8979	0,8686	0,8634	0,8375	0,8233	0,7872	0,7881	0,7506	0,7395
LN(1.6)	3,2262	1	1	1	1	1	1	0,9991	0,9687	0,946	0,923	0,9024	0,8878	0,8563	0,8492	0,8155	0,8106	0,7908	0,7809	0,7608
LN(1.7)	3,6635	1	1	1	1	1	1	0,9988	0,9735	0,9443	0,923	0,9073	0,8999	0,8594	0,846	0,8395	0,8212	0,793	0,7782	0,7695
LN(2)	5,4707	1	1	1	1	1	1	0,9778	0,9598	0,9357	0,9127	0,893	0,8843	0,8718	0,8617	0,844	0,8281	0,8073	0,812	
LN(2.2)	7,2432	1	1	1	1	1	1	0,9991	0,9779	0,9622	0,9405	0,9255	0,9093	0,9039	0,8815	0,8717	0,8526	0,8485	0,838	0,8232

Tabela A.31: Eficiência Relativa da Amplitude para modelos assimétricos

Modelo	$\tau$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\chi^2(20)$	1,0018	0,993	0,991	0,9537	0,9405	0,9499	0,92	0,9038	0,8974	0,8719	0,8535	0,8224	0,8361	0,7991	0,7835	0,7445	0,7646	0,7491	0,7387
$\chi^2(15)$	1,0026	1	0,9935	0,9732	0,9642	0,927	0,9105	0,8932	0,8891	0,8702	0,8778	0,8096	0,8349	0,7933	0,8033	0,7567	0,7642	0,7269	0,7072
$\chi^2(10)$	1,0044	1	0,9849	0,9705	0,9466	0,9264	0,9109	0,9047	0,8885	0,853	0,8657	0,8501	0,8305	0,7904	0,7869	0,7374	0,7813	0,7223	0,7427
$\chi^2(9)$	1,0051	1	0,9806	0,9748	0,9501	0,9286	0,9157	0,8995	0,8698	0,8735	0,8554	0,8276	0,8262	0,8055	0,7695	0,7447	0,7286	0,7286	0,7252
$\chi^2(5)$	1,0126	1	0,9901	0,9635	0,9401	0,9187	0,9245	0,8982	0,8788	0,8383	0,8504	0,8197	0,7968	0,8093	0,741	0,7389	0,7137	0,7034	0,6888
$\chi^2(4)$	1,0182	1	0,9831	0,9551	0,9388	0,9178	0,9082	0,8898	0,8722	0,8311	0,8185	0,7908	0,7577	0,7577	0,7414	0,7042	0,694	0,689	0,6482
G(1)	1,0624	1	0,9828	0,9449	0,9395	0,9223	0,9031	0,8801	0,8317	0,8527	0,7893	0,765	0,7348	0,7193	0,7033	0,6945	0,6708	0,6433	0,6328
G(0.75)	1,1055	1	0,9787	0,9541	0,9468	0,9206	0,9013	0,8689	0,8493	0,8214	0,7851	0,7648	0,7544	0,7393	0,7127	0,7044	0,6711	0,6912	0,6629
$\chi^2(1)$	1,2183	1	0,9856	0,9651	0,95	0,9233	0,9037	0,8493	0,8589	0,8461	0,8107	0,7887	0,782	0,7354	0,7036	0,7147	0,6845	0,6828	0,6593
W(0.75)	1,3052	1	0,981	0,9564	0,9372	0,9162	0,8826	0,8413	0,8302	0,797	0,803	0,7488	0,7353	0,7136	0,6839	0,6714	0,6538	0,66	0,6206
LN(0.8)	1,3942	1	0,9761	0,9511	0,9266	0,9067	0,8689	0,8415	0,8038	0,7959	0,7327	0,7246	0,7048	0,659	0,6559	0,6253	0,6036	0,58	0,5684
LN(0.9)	1,5146	1	0,9758	0,9461	0,9258	0,8987	0,8784	0,8357	0,7992	0,7787	0,7429	0,7111	0,6967	0,6617	0,6488	0,6229	0,5922	0,5747	0,5721
LN(1)	1,6576	1	0,9779	0,9453	0,9186	0,9017	0,8835	0,868	0,8041	0,7836	0,7405	0,7309	0,6985	0,6784	0,6268	0,6237	0,6122	0,5893	0,5943
LN(1.1)	1,8266	1	0,9771	0,942	0,9261	0,9094	0,8706	0,8352	0,8061	0,7856	0,7394	0,7194	0,6913	0,6793	0,6563	0,6334	0,6188	0,59	0,5835
LN(1.2)	2,0254	1	0,9783	0,9397	0,9203	0,911	0,8954	0,848	0,7993	0,78	0,7501	0,7343	0,7214	0,6894	0,6644	0,6369	0,621	0,6212	0,5889
W(0.5)	2,2598	1	0,9817	0,958	0,9407	0,9249	0,8972	0,8936	0,8539	0,8408	0,785	0,7843	0,7537	0,7576	0,7151	0,7077	0,6876	0,6741	0,6473
LN(1.4)	2,5322	1	0,9721	0,948	0,9239	0,9085	0,8922	0,8519	0,8086	0,7878	0,7697	0,7496	0,7234	0,7023	0,6897	0,6733	0,6597	0,6331	0,6319
LN(1.5)	2,8521	1	0,9787	0,9491	0,9304	0,9113	0,8891	0,8687	0,8213	0,8064	0,7831	0,7543	0,7502	0,7239	0,7104	0,6704	0,675	0,6335	0,6245
LN(1.6)	3,2262	1	0,9749	0,9478	0,9299	0,9132	0,9058	0,8656	0,8406	0,8116	0,7945	0,7775	0,7423	0,7398	0,7016	0,6995	0,6769	0,6697	0,6506
LN(1.7)	3,6635	1	0,9762	0,9535	0,9327	0,9154	0,9064	0,8762	0,8388	0,8165	0,8013	0,7977	0,7509	0,7341	0,7308	0,7146	0,6834	0,6667	0,6624
LN(2)	5,4707	1	0,9755	0,9534	0,9402	0,9245	0,9209	0,8898	0,8682	0,8418	0,8148	0,7908	0,7869	0,7742	0,7641	0,7448	0,7283	0,7064	0,7149
LN(2.2)	7,2432	1	0,9802	0,9579	0,9443	0,9326	0,9226	0,8976	0,8793	0,8529	0,8377	0,8195	0,8149	0,7897	0,7801	0,7583	0,7562	0,7462	0,7296

Tabela A.32: Eficiência Relativa do Desvio Absoluto da Média para modelos assimétricos

Modelo	$\tau$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\chi^2(20)$	1,0018	0,9973	0,9729	0,9723	0,9602	0,9314	0,9503	0,951	0,9405	0,9592	0,9717	0,9671	0,9459	0,9473	0,9821	0,9829	0,9671	0,9704	0,959
$\chi^2(15)$	1,0026	0,9914	0,9761	0,9612	0,9375	0,9529	0,9771	0,9721	0,9733	0,9873	0,9471	0,98	0,9696	0,9709	0,9784	0,9895	0,9783	0,9955	0,9994
$\chi^2(10)$	1,0044	0,9922	0,9774	0,9645	0,9535	0,9457	0,9545	0,9692	0,9668	0,992	0,9909	0,9966	0,9883	0,9951	0,9994	1	1	1	1
$\chi^2(9)$	1,0051	0,985	0,9745	0,9489	0,9375	0,9486	0,9539	0,9687	0,9849	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\chi^2(5)$	1,0126	0,9889	0,9543	0,9527	0,9425	0,9584	0,9415	0,9563	0,9895	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\chi^2(4)$	1,0182	0,9729	0,9636	0,9589	0,9453	0,9637	0,961	0,974	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$G(1)$	1,0624	0,9638	0,9506	0,9611	0,9656	0,9576	0,9855	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$G(0.75)$	1,1055	0,9669	0,955	0,9696	0,9642	0,9811	0,9902	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\chi^2(1)$	1,2183	0,976	0,9684	0,9693	0,9733	0,9923	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$W(0.75)$	1,3052	0,9671	0,9577	0,9646	0,97	0,9775	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$LN(0.8)$	1,3942	0,9664	0,9469	0,9434	0,9631	0,9782	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$LN(0.9)$	1,5146	0,9629	0,941	0,9491	0,9588	0,9859	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$LN(1)$	1,6576	0,9619	0,944	0,9455	0,9633	0,984	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$LN(1.1)$	1,8266	0,9602	0,9354	0,9442	0,9554	0,9694	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$LN(1.2)$	2,0254	0,9599	0,9408	0,9447	0,9671	0,9796	0,9989	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$W(0.5)$	2,2598	0,9697	0,9605	0,967	0,9785	0,9966	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$LN(1.4)$	2,5322	0,9588	0,9398	0,9476	0,9638	0,9864	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$LN(1.5)$	2,8521	0,9586	0,9471	0,9458	0,9588	0,985	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$LN(1.6)$	3,2262	0,9613	0,9447	0,9495	0,9648	0,9833	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$LN(1.7)$	3,6635	0,9649	0,9526	0,9488	0,9628	0,9852	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$LN(2)$	5,4707	0,9659	0,9512	0,9545	0,9655	0,9848	0,9998	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$LN(2.2)$	7,2432	0,9666	0,9543	0,9611	0,969	0,986	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1